ÍNDICE GENERAL

1 LA DIFERENCIAL — 1

Concepto 1
Ejercicio 19 5

2 LA INTEGRACIÓN. FÓRMULAS FUNDAMENTALES — 6

Concepto 6
Ejercicio 20 14

3 FÓRMULAS GENERALES — 15

Cambio de variable 15
Fórmula de u^n 16
Ejercicio 21 28

4 INTEGRALES DE LA FORMA $\int \left(\pm u^2 \pm a^2\right)^{k/2} dx$ — 29

Fórmulas 30
Ejercicio 22 35

5 **36**

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \left(ax^2 + bx + c\right)^{k/2} dx$$

Trasformación del trinomio $ax^2 + bx + c$ a la forma

$\left(mx + n\right)^2 + h$ 36

Aplicación a las integrales 46

Ejercicio 23 56

6 **58**

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \left(mx + n\right)\left(ax^2 + bx + c\right)^{k/2} dx$$

Ejercicio 24 71

7 **72**

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Fórmulas 72

Ejercicio 25 76

Técnicas y recursos de integración (área 2) 77

a) técnica de los cuadrados 80

b) técnica de pasar a senos y/o cosenos 90

c) técnica de los binomios conjugados 94

Ejercicio 26 97

8 **INTEGRACIÓN POR PARTES** (área 2) **98**

Fórmula de integración por partes 98
Ejercicio 27 112

9 **INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES** **113**

Concepto de fracciones parciales 113
Caso I 115
Ejercicio 28 125
Caso II 126
Ejercicio 29 130
Caso III 131
Caso IV 137
Ejercicio 30 139
Integración por fracciones parciales 140
Ejercicio 31 148

10 **DIVERSOS CAMBIOS DE VARIABLE TRIGONOMÉTRICOS** **149**

Procedimiento 149
Ejercicio 32 164

11 LA INTEGRAL DEFINIDA **165**

Ejercicio 33 170

12 APLICACIÓN: CÁLCULO DE ÁREAS **171**

Ejercicio 34 181

SOLUCIONES **183**

APÉNDICE A: FORMULARIO **196**

APÉNDICE B: REGLAS DE ESCRITURA **201**

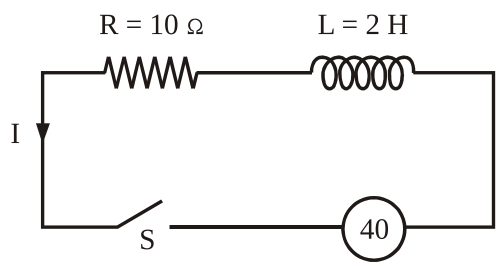
INTRODUCCIÓN

Este libro de Cálculo Integral está pensado y estructurado para estudiantes de preparatoria tomando en cuenta, además de los programas oficiales, su nivel de madurez y de conocimientos alcanzados hasta el momento en que llegan al presente semestre.

El enfoque fuerte que se le ha dado al libro es a la parte operacional, lo que comúnmente se le suele llamar "a la talacha", a pesar de que muchas tendencias didácticas actuales condenan la enseñanza del Cálculo basada en ella, aconsejando que se dé casi toda la importancia a la comprensión del concepto de la derivada.

Según las teorías de la didáctica moderna de la enseñanza del Cálculo, los alumnos no aprenden el Cálculo o les cuesta tanto trabajo porque no entienden el concepto de lo que es la derivada. Y los teóricos de esta corriente han dedicado horas y horas a intentar descubrir procedimientos, técnicas y/o recursos aúlicos para facilitarle o evidenciarle al alumno dicho concepto de la derivada. Muchos creen haberlo encontrado o descubierto ya. O bien, consideran que es más importante que el estudiante comprenda el concepto de la derivada a que adquiera la habilidad operacional para poder derivar cualquier función que se le presente.

Sin embargo, en la vida profesional solamente a los licenciados en alguna carrera puramente matemática les resulta útil o necesario dominar el concepto mencionado. Para los ingenieros, economistas, biólogos y profesionistas que en su quehacer requieren emplear el cálculo, lo que realmente necesitan es saber y dominar la parte operacional. Por ejemplo, un ingeniero electricista podrá encontrar, para cualquier tiempo t, el valor de la corriente eléctrica I del circuito de la siguiente figura



a partir de ciertas condiciones iniciales, resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} + 5i = 20$$

para lo cual lo único que requiere es habilidad operacional; en nada le ayudará tener claro y fresco en la mente el concepto de la derivada. Un Biólogo que sepa que un cultivo de bacterias crece a razón proporcional a la cantidad presente, podrá hallar el número existente para cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dx} - kn = 0$$

para lo cual, otra vez, lo único que requiere es habilidad operacional ya que en nada le ayudará tener claro y fresco en la mente el concepto de la derivada. Y así podrían ponerse un sinnúmero de ejemplos de las diferentes profesiones en que se requiere la utilización del Cálculo para resolver problemas de la vida real. Casos sencillos son los cálculos de áreas de ciertas figuras que se analizan en el capítulo 12 de este libro, página 171.

Desde esta perspectiva de los didactas actuales parecería que los estudiantes, una vez comprendido el concepto de la derivada, casi automáticamente aprenderán a derivar cualquier función y por inercia a integrar también. Y no es así. La realidad está muy lejana a esas románticas teorías. Si a un discente se le hace comprender perfectamente el significado de la derivada, ¿le ayudará en algo para poder integrar $\int \sqrt{9x^2 - 25}\; dx$. Claro que no. Sencillamente en nada.

Por esta razón, el presente libro ha dado casi toda la importancia a las técnicas de integración de cualquier función, explicando paso a paso en cada ejemplo lo que debe hacer el estudiante para dominarlas.

LO REFERENTE A LAS ÁREAS

El lector encontrará al inicio de cada capítulo, lo mismo al final de ellos, que cada bloque de ejercicios propuestos especifican las áreas a las que se recomienda su estudio. Algunos temas y algunos ejercicios se dejan de forma exclusiva para el área 2 por tratarse del área de Matemáticas.

Se refiere a la siguiente clasificación de áreas:

Área 1: Químico-Biológicas. Carreras como Ingeniería Química, licenciatura en Biología, Medicina, Veterinaria, etc.

Área 2: Físico-Matemáticas. Carreras como Ingeniería Civil, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Eléctrica, Arquitectura, licenciaturas en Física y/o Matemáticas, etc.

Área 3: Económico-Administrativa. Carreras como Economía, Mercadotecnia, Administración, etc.

Área 4: Humanidades. Carreras como Derecho, Sociología, Historia, Filosofía, carreras de artes, etc.

I

LA DIFERENCIAL

Cuando se tiene una función cualquiera, por ejemplo, $y = x^2 - 5x - 9$, conforme a lo visto en el semestre anterior, su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5 \qquad \text{(I)}$$

cabría decir que del símbolo operador derivada, el numerador dy se llama **diferencial de *y***, mientras que el denominador dx se llama **diferencial de *x*.** Si se despeja la diferencial de y se obtiene

$$dy = \left(2x - 5\right)dx \qquad \text{(II)}$$

Sin entrar en detalles rigurosos, la diferencial de x es igual al incremento de x, es decir que $dx = \Delta x$, mientras que la diferencial de y, según se ve en la igualdad (II), es igual a la derivada de la función por la diferencial de x. Ésta última es la que se tomará como regla para el cálculo de diferenciales en los ejemplos siguientes.

Una diferencial es un elemento infinitesimal, es decir, un elemento que tiende a cero.

Ejemplo 1: Calcular la diferencial dy de la función $y = x^3 - 7x^2 + 4$.

Solución: Se puede ver desde dos enfoques un poco distintos. El primero consiste en derivar y luego despejar dy. Haciéndolo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x$$

de donde

$$\boxed{dy = \left(3x^2 - 14x\right)dx}$$

El segundo enfoque consiste en aplicar directamente la regla, es decir, la diferencial de y es igual a la derivada de la función por la diferencial de x, que no es otra cosa que el resultado anterior.

Ejemplo 2: Calcular dy si $y = \sqrt{5x - 4}$

Solución: La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x - 4}}$$

de donde

$$\boxed{dy = \frac{5\,dx}{2\sqrt{5x - 4}}}$$

Ejemplo 3: Calcular dy si $y = \left(4x - 7\right)^8$

Solución: La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(4x - 7\right)^7 \frac{d}{dx}\left(4x - 7\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(4x - 7\right)^7 \left(4\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 32\left(4x - 7\right)^7$$

de donde

$$\boxed{dy = 32\left(4x - 7\right)^7 \, dx}$$

Ejemplo 4: Calcular la diferencial dy si $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x - 1}}$

Solución: Derivando, a partir de que $y = \left(4x - 1\right)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\left(4x - 1\right)^{-3/2} \frac{d}{dx}\left(4x - 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\left(4x - 1\right)^{-3/2}\left(4\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{2\left(4x - 1\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\left(4x - 1\right)^{3/2}}$$

de donde

$$\boxed{dy = -\frac{2 \, dx}{\left(4x - 1\right)^{3/2}}}$$

Ejemplo 5: Calcular la diferencial dy si $y = ln \, 2x$

Solución: Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}2x}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

de donde

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\boxed{dy = \frac{dx}{x}}$$

EJERCICIO 19

Calcular la diferencial *dy* de las siguientes funciones:

1) $y = x^5 - 7x + 8$

2) $y = 5x^3 + 5x^2 - x$

3) $y = \dfrac{6}{4x^2 - 63}$

4) $y = \sqrt{9 - 5x^7}$

5) $y = \sqrt[7]{2x^4 - 8x^3 + x}$

6) $y = \dfrac{7}{\sqrt{9 - 2x}}$

7) $y = \dfrac{5}{\left(x^3 - 3x^2 + 9x\right)^4}$

8) $y = \dfrac{11}{\left(6 - 7x^4\right)^9}$

9) $y = \dfrac{3}{\sqrt[5]{\left(x - 6x^6\right)^9}}$

10) $y = sen\left(5x - 7\right)$

11) $y = cos\left(3x - 4x^7\right)$

12) $y = tan\sqrt{2x - 9}$

13) $y = sec\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

14) $y = ln\sqrt{x^7}$

15) $y = e^{4x}$

16) $y = e^{\sqrt{3x}}$

II

LA INTEGRACIÓN. FÓRMULAS FUNDAMENTALES

La integración es la operación inversa a la derivación. El símbolo de integración es $\int$, aunque en realidad no puede considerarse separado de la diferencial, o sea que en $\int F(x)\, dx$ la función $F(x)$ es lo que se integra y de alguna manera puede considerarse enmedio del símbolo $\int$ y de la diferencial dx.

De tal manera que si $y = f(x)$ es la función original, su derivada es $\frac{dy}{dx} = F(x)$; entonces la integral de esta última regresa a la función original, es decir

$$\int F(x)\, dx = f(x)$$

Por ejemplo, si la función original es $y = x^2$, su derivada es otra función de equis, en este caso, $2x$. Por lo tanto, si se integra $2x$ se regresa a la función original x^2:

$$\int 2x\, dx = x^2 \qquad \text{(a)}$$

Sin embargo, si $y = x^2 + 2$, su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{(la misma que de la función } y = x^2\text{)}$$

y, por lo tanto, su integral es la función original, esto es que

$$\int 2x\,dx = x^2 + 2 \qquad \text{(b)}$$

Pero obsérvese que tanto (a) como (b) son la misma integral $\int 2x\,dx$ y sin embargo tienen diferente resultado. Esto se debe a que cualquier función que termine en la suma de una constante, al derivarse dicha función se obtiene cero al final como resultado de la derivada de la constante final. Entonces al integrar debe agregarse siempre un término constante $+ C$. Así aparecerán todas las fórmulas de integración.

Una integral de una función $F(x)$, visto de otra forma, es lo mismo que preguntarse: ¿La derivada de qué otra función da $F(x)$? Así, en los ejemplos recientes, la integral $\int 2x\,dx$ equivale a preguntarse ¿la derivada de qué da $2x$? Y la respuesta es la derivada de x^2; pero también de, por ejemplo, $x^2 + 2$; o de $x^2 + 5$; o de $x^2 + 23$. En general, de $x^2 + C$.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES

Son cinco las fórmulas fundamentales o más elementales de integración:

(1) $$\int dx = x + c$$

(2) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad , \quad \text{para } n \neq -1$$

(3) $$\int c\, u\, dx = c \int u\, dx$$

(4) $$\int (u + v + w + ...)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx + \int w\, dx + ...$$

(5) $$\int \frac{dx}{x} = ln\, x + c$$

En donde: c = constante.
$u, v, w, ...$ = funciones o variables.

La fórmula (2) funciona para todos los valores de n, excepto para cuando $n = -1$, porque vuelve cero el denominador. Cuando $n = -1$ se tiene la fórmula (5).

Ejemplo 1: Integrar $\int x^6\, dx$

Solución: Por la fórmula (2):

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c$$

$$\boxed{\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int 24x^2 dx$

Solución: Por la fórmula (3), la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 24x^2\, dx = 24 \int x^2\, dx$$

Ahora empleando la fórmula (2):

$$= 24\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] + c$$

$$= \frac{24\,x^3}{3} + c$$

$$\boxed{\int 24x^2\ dx = 8x^3 + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int 7x^9\ dx$

Solución: Por la fórmula (3), la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 7x^9 dx = 7\int x^9 dx$$

Ahora empleando la fórmula (2):

$$7\int x^9 dx = 7\left[\frac{x^{9+1}}{9+1}\right] + c$$

$$\boxed{\int 7x^9 dx = \frac{7x^{10}}{10} + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int \left(6x^2 + 8x - 9\right) dx$

Solución Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int \left(6x^2 + 8x - 9\right) dx = \int 6x^2 dx + \int 8x dx - \int 9 dx$$

Para cada una de las tres integrales pendientes se utiliza la fórmula (3), donde la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 6x^2dx + \int 8xdx - \int 9dx = 6\int x^2dx + 8\int xdx - 9\int dx$$

Ahora, para las dos primeras integrales debe usarse la fórmula (2) y para la tercera integral la fórmula (1):

$$\int 6x^2dx + \int 8xdx - \int 9dx = 6\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] + 8\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] - 9\left[x\right] + c$$

$$= \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + c$$

$$\boxed{\int \left(6x^2 + 8x - 9\right)dx = 2x^3 + 4x^2 - 9x + c}$$

Ejemplo 5 Integrar $\int \left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx$

Solución Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int \left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx = \int 4x^2dx - \int xdx + \int \frac{5}{4}dx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$= 4\int x^2dx - \int xdx + \frac{5}{4}\int dx - \int \frac{dx}{x}$$

Para la primera y segunda integral se emplea la fórmula (2) ; para la tercera integral la fórmula (1) y para la cuarta integral la fórmula (5) :

$$= 4\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x - \ln x + c$$

$$\boxed{\int \left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4} - \ln x + c}$$

Ejemplo 6: Integrar $\int \sqrt{x^7}\ dx$

Solución: En estas integrales debe escribirse la función con exponente fraccionario para convertirla a la forma u^n:

$$\int \sqrt{x^7}\ dx = \int x^{7/2} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + c = \frac{x^{9/2}}{\frac{9}{2}} + c$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^7}\ dx = \frac{2x^{9/2}}{9} + c}$$

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{dx}{x^9}$

Solución: Escribiendo la función con exponente negativo:

$$\int \frac{dx}{x^9} = \int x^{-9}\ dx$$

$$= \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = \frac{x^{-8}}{-8} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^9} = \frac{1}{-8x^8} + c}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}}$

Solución: Escribiendo afuera de la integral la constante y con exponente fraccionario y negativo la función, se tiene que:

$$\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}} = \frac{11}{6} \int x^{-5/3} dx$$

$$= \frac{11}{6}\left[\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c\right] = \frac{11}{6}\left[\frac{x^{-2/3}}{-\frac{2}{3}} + c\right]$$

$$= \frac{11}{6}\left[\frac{3}{-2\,x^{2/3}} + c\right] = \frac{33}{-12x^{2/3}} + c$$

$$\boxed{\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}} = \frac{11}{-4x^{2/3}} + c}$$

Ejemplo 9 $\int \left(9x^2 - 6x + \frac{4}{x}\right) dx$

Solución: Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int\left(9x^2-6x+\frac{4}{x}\right)dx=\int 9x^2\,dx-\int 6x\,dx+\int\frac{4}{x}\,dx$$

Ahora con la fórmula (3) de la constante para cada una de ellas:

$$=9\int x^2\,dx-6\int x\,dx+4\int\frac{dx}{x}$$

Para las dos primeras integrales debe utilizarse la fórmula (2) de la potencia y para la tercera integral la fórmula (5):

$$=9\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]-6\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]+4\left[ln\ x\right]+c$$

$$=\frac{9x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+4\,ln\,x+c$$

$$\boxed{\int\left(9x^2-6x+\frac{4}{x}\right)dx=3x^3-3x^2+4\,ln\,x+c}$$

EJERCICIO 20 (Áreas 1, 2 y 3)

1) $\int x^{11} dx$

2) $\int x^{10} dx$

3) $\int 6x dx$

4) $\int 9x^6 dx$

5) $\int (6x-5) dx$

6) $\int (11x^3 - 9x^2 + x - 5) dx$

7) $\int (7x^2 + 8x - 2) dx$

8) $\int (3x^2 + 10x - 11) dx$

9) $\int \frac{dx}{x^4}$

10) $\int \frac{dx}{2x}$

11) $\int \left(8x^3 - \frac{4}{3x^2} + \frac{2}{5x} \right) dx$

12) $\int \left(\frac{3}{5\sqrt{x^9}} + \frac{5\sqrt{x^9}}{3} \right) dx$

13) $\int \left(\frac{6}{11x} - \frac{11x}{6} \right) dx$

14) $\int \left(\frac{9}{2x^5} + \frac{2x^5}{9} \right) dx$

15) $\int \left(\frac{11}{10\sqrt[5]{x^8}} + \frac{10\sqrt[5]{x^8}}{11} \right) dx$

16) $\int \left(\frac{13}{11\sqrt[13]{x^4}} - \frac{11\sqrt[13]{x^4}}{13} \right) dx$

III

FÓRMULAS GENERALES

Las fórmulas vistas en el capítulo anterior fueron muy específicas para integrales de x elevada a cualquier potencia; sin embargo, no siempre, o más bien, pocas veces lo que está elevado a la potencia n es la pura variable x, sino una función completa. Para eso, de manera muy similar a lo que ocurrió con las derivadas, se requieren fórmulas generales. Todas las fórmulas que se verán de aquí en adelante son fórmulas generales, es decir en términos de u, no de x.

Y algo muy importante: para cada fórmula general debe emplearse un procedimiento llamado *cambio de variable,* el cual se explicará con detalle en cada uno de los ejemplos siguientes. El estudiante que no sepa, o no aprenda, a hacer cambios de variable para integrar, está condenado a no poder integrar nunca ninguna función.

De manera muy general, los pasos fundamentales en todo cambio de variable son:

***a) Seleccionar* u;**
***b) Una vez hecha la elección de* u*, calcular inmediatamente después la diferencial de* u*, es decir,* du.**

Todo cambio de variable debe transformar la integral original en una fórmula.

FÓRMULAS GENERALES:

(6) $$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad , \quad \text{para} \;\; n \neq -1$$

(7) $$\int \frac{du}{u} = ln\, u + c$$

La fórmula (6) puede emplearse siempre que n sea diferente de *menos uno*, ya que si vale *menos uno* el denominador de la fórmula se vuelve cero y hay que recordar que en matemáticas no se vale dividir entre cero porque da infinito.

En caso de que n valga *menos uno* se obtiene realmente la fórmula (7).

Ejemplo 1: Integrar $\int (3x-2)^7\, dx$

Solución: Obsérvese que lo que está elevado a la séptima potencia no es la variable x, sino el polinomio $3x - 2$. Por lo tanto, no puede emplearse la fórmula (2), sino la (6), lo que significa que u debe ser $3x - 2$.

Si $u = 3x - 2$, entonces calculando la diferencial de u se obtiene que
$du = 3dx$

La fórmula (6) habla de $\int u^n du$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, *du.* En este ejemplo, dicha diferencial du es $3dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (6) debe tenerse en la integral original $3dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 3.

Si la integral original se multiplica por 3 se consigue tener $3dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 3. Haciéndolo:

$$\int (3x-2)^7\,dx = \int (3x-2)^7 \left(\frac{1}{3}\right)(3)\,dx$$

se divide y se multiplica por tres al mismo tiempo

Por la fórmula (3) de la página 8, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un tercio se echa para afuera, quedando:

$$\int (3x-2)^7\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3x-2)}_{u}{}^7\ \underbrace{3\,dx}_{du}$$

En este momento se ha completado el cambio de variable y la integral original convertida en fórmula ya puede escribirse como

$$\int (3x-2)^7\,dx = \frac{1}{3}\int u^7\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u^{7+1}}{7+1}\right] + c = \frac{u^8}{24} + c$$

Una vez integrado al haber aplicado la fórmula correspondiente, se debe regresar a la variable original, sustituyendo u por lo que vale. En este caso, recordar que $u = 3x - 2$:

$$\boxed{\int (3x-2)^7\, dx = \frac{(3x-2)^8}{24} + c}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int \sqrt{11x+8}\; dx$

Solución: Debe escribirse como $\int (11x+8)^{1/2}\, dx$

Obsérvese que lo que está elevado a la potencia un medio no es la variable x, sino el polinomio $11x + 8$. Por lo tanto, no puede emplearse la fórmula (2), sino la (6), lo que significa que u debe ser $11x + 8$.

Si $u = 11x + 8$, entonces calculando la diferencial de u se obtiene que
$du = 11dx$

La fórmula (6) habla de $\int u^n du$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, du. En este ejemplo, dicha diferencial du es $11dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (6) debe tenerse en la integral original $11dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 11.

Si la integral original se multiplica por 11 se consigue tener $11dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 11. Haciéndolo:

$$\int (11x+8)^{1/2}\, dx = \int (11x+8)^{1/2}\left(\frac{1}{11}\right)(11)\, dx$$

se divide
y se multiplica por once al mismo tiempo

Por la fórmula (3) de la página 8, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un onceavo se echa para afuera, quedando:

$$\int (11x+8)^{1/2}\,dx = \frac{1}{11}\int \underbrace{(11x+8)}_{u}{}^{1/2}\ \underbrace{11dx}_{du}$$

En este momento se ha completado el cambio de variable y la integral original convertida en fórmula ya puede escribirse como

$$\int (11x+8)^{1/2}\,dx = \frac{1}{11}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{11}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c \; = \; \frac{1}{11}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{2u^{3/2}}{33} + c$$

Una vez integrado al haber aplicado la fórmula correspondiente, se debe regresar a la variable original, sustituyendo u por lo que vale. En este caso, recordar que $u = 11x + 8$:

$$\boxed{\int \sqrt{11x+8}\,dx = \frac{2(11x+8)^{3/2}}{33} + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{dx}{4x-10}$

Solución: En este caso, la fórmula a emplear es la (7), para lo cual debe hacerse

$u = 4x - 10$ de donde
$du = 4dx$

La fórmula (7) habla de $\int \frac{du}{u}$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, *du*. En este ejemplo, dicha diferencial du es $4dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (7) debe tenerse en la integral original $4dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 4.

Si la integral original se multiplica por 4 se consigue tener $4dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 4. Haciéndolo:

$$\int \frac{dx}{4x-10} = \int \frac{\left(\frac{1}{4}\right)(4)\,dx}{4x-10}$$

Por la fórmula (3) de la página 8, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un cuarto se echa para afuera, quedando:

$$\int \frac{dx}{4x-10} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dx}{4x-10} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow du \\ \longleftarrow u \end{array}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln u + c$$

Y regresando a la variable original, sustituyendo u por $4x - 10$:

$$\boxed{\int \frac{dx}{4x-10} = \frac{1}{4}\, ln\left(4x-10\right) + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int x\left(5x^2-6\right)^4 dx$

Solución: La integral se puede escribir como $\int\left(5x^2-6\right)^4 x\,dx$. Si se hace u = 5x^2 - 6, entonces su diferencial es du = 10x dx. En la integral original solamente se tiene $x\,dx$, por lo que le falta un 10 multiplicando, pero para que no se altere, se debe dividir entre 10 también.

Por lo visto en los ejemplos anteriores, en estos momentos ya se sabe que el factor $\frac{1}{10}$ "no sirve", por lo que se tiene que sacar de la integral. Resulta:

$$\int\left(5x^2-6\right)^4 x\,dx = \frac{1}{10}\int \underbrace{\left(5x^2-6\right)^4}_{u}\ \underbrace{10x\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{10}\int u^4 du = \frac{1}{10}\left[\frac{u^{4+1}}{4+1}\right] + c$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{u^5}{5}\right] + c = \frac{u^5}{50} + c$$

Y regresando a la variable original, sabiendo que u = 5x^2 - 6, se llega a:

$$\boxed{\int x\left(5x^2-6\right)^4 dx = \frac{\left(5x^2-6\right)^5}{50} + c}$$

Ejemplo 5: Integrar $\int \frac{4x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3}$

Solución: Sea $u = 7x^2 - 9$, de donde

$du = 14x\ dx$

Si en la integral original estuviera en el numerador $14x\ dx$ en vez de $4x\,dx$, se tendría la diferencial de u , o sea du, que es lo que pide la fórmula; pero no es así. Sin embargo, el problema se arregla muy fácil: la constante 4 que "no sirve" se echa para fuera de la integral. Luego se multiplica y se divide simultáneamente por 14, lo que queda así:

$$4\int \frac{\left(\frac{1}{14}\right)(14)\,x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = \frac{4}{14}\int \frac{14x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow du \\ \longleftarrow u \end{array}$$

$$= \frac{4}{14}\int \frac{du}{u^3} = \frac{2}{7}\int u^{-3}du$$

$$= \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-3+1}}{-3+1}\right] + c = \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right] + c$$

$$= \frac{2}{-14u^2} + c$$

Simplificando y regresando a la variable original se llega finalmente a

$$\boxed{\int \frac{4\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = -\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2} + c}$$

COMPROBACIÓN: La comprobación consiste simplemente en derivar el resultado obtenido:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2}+c\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2}\right)+\frac{d}{dx}c$$

$$= -\frac{1}{7}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left(7x^2-9\right)^2}\right)+0$$

$$= -\frac{1}{7}\frac{d}{dx}\left(7x^2-9\right)^{-2}$$

$$= -\frac{1}{7}\left[-2\left(7x^2-9\right)^{-2-1}\frac{d}{dx}\left(7x^2-9\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{7}\left[-2\left(7x^2-9\right)^{-3}(14x)\right]$$

$$= -\frac{28x}{7\left(7x^2-9\right)^3}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2}+c\right] = \frac{4x}{\left(7x^2-9\right)^3}}$$

Que es lo que se integró.

Ejemplo 6: Integrar $\int (x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx$

Solución: Sea $u = x^2 - 2x - 8$ de donde
$du = (2x - 2)\, dx$

Si se multiplica por 2 la integral original se obtiene la diferencial de u .Obviamente, debe dividirse también entre 2:

$$\frac{1}{2}\int 2(x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\left(x^2-2x-8\right)}_{u}{}^7 \underbrace{(2x-2)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^7 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{7+1}}{7+1}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^8}{8}\right] + c = \frac{u^8}{16} + c$$

$$\boxed{\int (x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx = \frac{\left(x^2-2x-8\right)^8}{16} + c}$$

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$

Solución: Sea $u = 3x^2 - 12x + 1$ de donde

$du = (6x - 12)dx$

Los ejemplos anteriores deben haber capacitado al alumno para que sea capaz en este ejemplo de analizar por su propia cuenta el manejo de las constantes que se va a hacer:

$$\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}} = \int \frac{5(x-2)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= 5\int \frac{6(x-2)\,dx}{6\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{(6x-12)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= \frac{5}{6}\int \left(3x^2-12x+1\right)^{-1/2}(6x-12)\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\int u^{-1/2}du$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]+c$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{5}{6}\left[2\sqrt{3x^2 - 12x + 1}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2 - 12x + 1}} = \frac{5\sqrt{3x^2 - 12x + 1}}{3} + c}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{(3x+12)\,dx}{x^2 + 8x - 7}$

Solución: Sea $u = x^2 + 8x - 7$, de donde
$du = (2x + 8)dx$

Nuevamente se deja al estudiante analizar por su propia cuenta el manejo de las constantes que se va a hacer:

$$\int \frac{(3x+12)\,dx}{x^2 + 8x - 7} = \int \frac{3(x+4)\,dx}{x^2 + 8x - 7}$$

$$= 3\int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x+4)\,dx}{x^2 + 8x - 7}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+8)\,dx}{x^2 + 8x - 7} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow du \\ \longleftarrow u \end{array}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2} ln\, u + c$$

Y regresando a la variable original se llega a que

$$\boxed{\int \frac{(3x+12)\,dx}{x^2+8x-7} = \frac{3}{2}\, ln\left(x^2+8x-7\right) + c}$$

Ejemplo 9: Integrar $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10}$

Solución: Sea $u = e^{2x} + 10$, de donde

$du = 2e^{2x}\,dx$

Entonces

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+10} \begin{array}{l} \longleftarrow du \\ \longleftarrow u \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln\, u + c$$

Y regresando a la variable original:

$$\boxed{\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10} = \frac{1}{2} ln\left(e^{2x}+10\right) + c}$$

EJERCICIO 21 (Áreas 1, 2 y 3)

Realizar las siguientes integrales por medio de un cambio de variable:

1) $\int (13x-12)^7\, dx$

2) $\int (2-19x)^{11}\, dx$

3) $\int \sqrt{7x-15}\, dx$

4) $\int \frac{dx}{8x-13}$

5) $\int \frac{6\,dx}{(15x+11)^9}$

6) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{9-4x}}$

7) $\int x\left(3x^2-11\right)^8 dx$

8) $\int \frac{3x\,dx}{\left(3x^2-1\right)^4}$

9) $\int (x+8)\left(5x^2+80x+22\right)^3 dx$

10) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(4x^2-8x\right)^6}$

11) $\int (4x+1)\sqrt{6x^2+3x+11}\, dx$

12) $\int \frac{(10x+15)\,dx}{\sqrt{7x^2+21x-9}}$

13) $\int \frac{\left(4x^2+12\right)dx}{\left(x^3+9x\right)^2}$

14) $\int e^{3x}\left(e^{3x}-8\right)^5 dx$

15) $\int (3x-3)\sqrt[5]{\left(5x^2-10x+9\right)^2}\, dx$

16) $\int \frac{\left(4x^2+2\right)dx}{\sqrt[4]{\left(8x^3+12x-1\right)^3}}$

17) $\int \frac{\left(8x^3+8x\right)dx}{x^4+2x^2-9}$

18) $\int \frac{\left(7x^2+7x\right)dx}{\left(2x^3+3x^2-9\right)^8}$

IV

INTEGRALES DE LA FORMA

$\int \left(\pm u^2 \pm a^2\right)^{\frac{k}{2}} dx$, con $k = \pm 1, -2$

En este capítulo se verán nueve fórmulas más, las cuales pueden enunciarse de manera no formal con el siguiente texto: Son las fórmulas de todas las posibles combinaciones de u^2 y a^2, sumadas o restadas, con raíz cuadrada o sin ella, en el numerador o en el denominador.

a) *Sumadas o restadas*: Según se tome el signo positivo o negativo del $\pm$ que aparece en la forma delante de u y de a.

b) *Con raíz cuadrada*: Si $k = \pm 1$, ya que el exponente toma el valor de ½ o de - ½, o sin raíz cuadrada si $k = -2$.

c) *En el numerador o en el denominador*: Si k es positivo el exponente es positivo y la expresión está en el numerador; si k es negativo el exponente es negativo y la expresión está en el denominador.

Las nueve fórmulas son:

I) Con raíz cuadrada en el numerador:

(8) $$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

(9) $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

(10) $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen \frac{u}{a} + c$$

II) Sin raíz cuadrada en el denominador:

(11) $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\ tan \frac{u}{a} + c$$

(12) $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left(\frac{u - a}{u + a}\right) + c$$

(13) $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} ln\left(\frac{a + u}{a - u}\right) + c$$

III) Con raíz cuadrada en el denominador:

(14) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

(15) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

(16) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ sen \frac{u}{a} + c$$

Ejemplo 1: Integrar $\int \sqrt{9x^2 + 25}\ dx$

Solución: Sean $a^2 = 25$

$u^2 = 9x^2$ por lo que

$u = 3x$

$du = 3dx$

$a = 5$

No olvidar que en el uso de cualquier fórmula debe hacerse cambio de variable. En este caso, si se va a utilizar la fórmula (8) , ésta pide, además del radical, la diferencial du que en este ejemplo vale $3\,dx$. Por lo tanto, tiene que multiplicarse y dividirse la integral original por 3:

$$\int \sqrt{9x^2 + 25}\ dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\sqrt{9x^2 + 25}}_{\sqrt{u^2 + a^2}}\ \underbrace{3\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) \right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3x}{2} \sqrt{9x^2 + 25} + \frac{25}{2} ln\left(3x + \sqrt{9x^2 + 25}\right) \right] + c$$

$$\boxed{\int \sqrt{9x^2 + 25}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{9x^2 + 25} + \frac{25}{6} ln\left(3x + \sqrt{9x^2 + 25}\right) + c}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int \frac{dx}{36 - 49x^2}$

Solución: La integral tiene la forma de la fórmula (13) (sin raíz cuadrada y en el denominador):

Sean $a^2 = 36$
$u^2 = 49x^2$ por lo que
$u = 7x$
$du = 7dx$
$a = 6$

Para tener la diferencial du que pide la fórmula (13) debe multiplicarse y dividirse la integral original por 7:

$$\int \frac{dx}{36 - 49x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{7\,dx}{36 - 49x^2} \quad \begin{matrix} \longleftarrow du \\ \longleftarrow a^2 - u^2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{du}{a^2 - u^2}$$

$$= \frac{1}{7}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{a + u}{a - u}\right)\right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$= \frac{1}{7}\left[\frac{1}{2(6)} ln\left(\frac{6+7x}{6-7x}\right)\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{36-49x^2} = \frac{1}{84} ln\left(\frac{6+7x}{6-7x}\right) + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2-4}}$

Solución: La integral tiene la forma de la fórmula (15) (con raíz cuadrada y en el denominador):

Sean
$a^2 = 4$
$u^2 = 81x^2$ por lo que
$u = 9x$
$du = 9dx$
$a = 2$

El 5 del numerador es una constante que puede echarse afuera de la integral. Además, para tener la diferencial du que pide la fórmula (15) debe multiplicarse y dividirse la integral por 9:

$$\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2-4}} = 5\left(\frac{1}{9}\right)\int \frac{9\,dx}{\sqrt{81x^2-4}} \qquad \begin{matrix} \longleftarrow du \\ \longleftarrow \sqrt{u^2-a^2} \end{matrix}$$

$$= \frac{5}{9}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{5}{9}\left[ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)\right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$\boxed{\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2-4}} = \frac{5}{9}\,ln\left(9x+\sqrt{81x^2-4}\right)+c}$$

EJERCICIO 22 (Áreas 1, 2 y 3)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int \sqrt{64x^2+121}\ dx$

2) $\int \sqrt{81-144x^2}\ dx$

3) $\int \frac{7\ dx}{1-4x^2}$

4) $\int \frac{2\ dx}{\sqrt{25-169x^2}}$

5) $\int \sqrt{100-9x^2}\ dx$

6) $\int \sqrt{9x^2-1}\ dx$

7) $\int \frac{9\ dx}{100x^2+81}$

8) $\int \frac{6\ dx}{16x^2-49}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

10) $\int \frac{10\ dx}{\sqrt{9x^2+100}}$

11) $\int \frac{12\ dx}{\sqrt{400x^2-121}}$

12) $\int \sqrt{81-121x^2}\ dx$

13) $\int \frac{8\ dx}{1-x^2}$

14) $\int \frac{11\ dx}{\sqrt{x^2+1}}$

V

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \left(ax^2 + bx + c\right)^{\frac{k}{2}} dx \text{ , con } k = \pm 1, -2$$

Las nueve fórmulas estudiadas en el capítulo anterior son las que habrán de utilizarse en este tema. Simplemente habrá que agregar algunos pasos algebraicos que servirán para transformar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ a la forma $(mx + n)^2 + h$, que, como se verá, se reduce a las fórmulas anteriores. Para esto, como es indispensable que el estudiante tenga la habilidad algebraica suficiente para realizar las transformaciones mencionadas, la primera parte de este capítulo se dedicará a ejercitar el paso de una forma algebraica a la otra requerida. Para deducir el procedimiento, se comenzará de atrás para adelante.

Supóngase que se tiene la suma de un binomio al cuadrado más cualquier constante, que en términos genéricos se puede enunciar como $(mx + n)^2 + h$, por ejemplo

$$\underbrace{\left(2x+7\right)^2}_{\text{binomio al cuadrado}} + \underbrace{9}_{\text{constante}}$$

Si se desarrolla (recordando que el binomio cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo) se obtiene:

$$(2x+7)^2+9 = 4x^2+28x+49+9$$

cuadrado del 1º

doble producto del 1º por el 2º

cuadrado del 2º

$$\left(2x+7\right)^2+9 = \underbrace{4x^2+28x+58}_{\text{trinomio}} \qquad \text{(A)}$$

No se pierda de vista que aquí del binomio al cuadrado más la constante se partió a obtener un trinomio cuadrático. Como en matemáticas toda operación o proceso tiene su inverso o camino de retorno, la igualdad (A) puede pensarse en desarrollarse a la inversa, es decir, a partir del trinomio obtener el binomio al cuadrado más la constante, al que equivale.

Inicialmente habría que observar que del trinomio cuadrático:

a) $4x^2$ salió del cuadrado del primer término del binomio. Significa que su raíz cuadrada es el primer término del binomio.

b) $28x$ salió del doble producto del primer término del binomio por el segundo. De aquí se puede calcular fácilmente el segundo término del binomio, pues el primero ya se conoce a partir del paso anterior.

Entonces lo único que faltaría por saber es el valor de la constante que suma al binomio. Un razonamiento lógico conduce a su obtención, como se verá en los siguientes dos ejemplos.

Por ejemplo, para transformar $9x^2 + 30x + 41$ a la forma $(mx + n)^2 + h$, en donde m, n y h son números o constantes, se deduce que $9x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio, por lo tanto dicho primer término es $3x$. También, por lo dicho líneas arriba, $30x$ es el doble producto del primer término por el segundo y sabiendo que el primero es $3x$, por simples divisiones se obtiene que el segundo término del binomio es

$$30x \div 2 \div 3x = \frac{\frac{30x}{2}}{3x}$$

$$30x \div 2 \div 3x = 5$$

El binomio al cuadrado buscado es $(3x + 5)^2$. Para deducir la constante que falta en el proceso se desarrolla (de preferencia mentalmente) el binomio y se compara con el trinomio original. Por comparaciones se sumará y/o restará lo que haga falta para que sean iguales.

$$\underbrace{9x^2 + 30x + 41}_{} = \underbrace{\left(3x + 5\right)^2}_{} + \mathbf{?} \qquad \text{(a)}$$

$$\overbrace{9x^2 + 30x + 41}^{} = \overbrace{9x^2 + 30x + 25}^{} + \mathbf{?} \qquad \text{(b)}$$

no son iguales

En realidad, lo que está escrito del lado izquierdo del signo igual (=) en el renglón (b) no es igual a lo que aparece del lado derecho. Basta observar que en ambos lados está $9x^2$; también está $30x$, pero en el lado izquierdo hay un $+41$ que no está en el derecho y en el derecho hay un $+25$ que no está en el lado izquierdo. A veces es muy directo deducir lo que hace falta para que sean iguales, como en este ejemplo, con la simple pregunta ¿Cuánto le falta al 25 para llegar al 41? Sumarle 16.

Pero no siempre es tan directo, sobretodo cuando se tienen fracciones, como se verá en los ejemplos 4 y 5. Entonces un razonamiento genérico es el siguiente: Para que realmente sean iguales basta sumar en el renglón (a) en el lado derecho el $+41$ que está en el lado izquierdo (para que así ya aparezca en ambos lados) y también restar en el lado derecho -25 que es el equivalente a "borrar" el $+25$ que está en el derecho y no en el izquierdo.

De lo anterior, resulta:

$$9x^2 + 30x + 41 = (3x + 5)^2 + 41 - 25$$

$$\boxed{9x^2 + 30x + 41 = \left(3x + 5\right)^2 + 16}$$

Ejemplo 2: Transformar el trinomio $4x^2 - 28x + 45$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Si $4x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $2x$.

Si $28x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $2x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo $-28x \div 2 \div 2x = -7$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $(2x - 7)^2$.

Pero $(2x - 7)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $4x^2 - 28x + 45 \neq \left(2x - 7\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$(2x - 7)^2 =$	cuadrado del 1er término;	menos el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$4x^2 - 28x + 45 \neq 4x^2 \quad - \quad 28x \quad + \quad 49$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $4x^2$ está en ambos lados; $-28x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+45$ que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $+49$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar -49 y sumar $+45$ simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$4x^2 - 28x + 45 = \left(2x - 7\right)^2 - 49 + 45$$

$$\boxed{4x^2 - 28x + 45 = \left(2x - 7\right)^2 - 4}$$

Ejemplo 3: Transformar el trinomio $25x^2 - 18x + 35$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Si $25x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $5x$.

Si $18x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $5x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo

$$-18x \div 2 \div 5x = -\frac{9}{5}\,.$$

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(5x - \frac{9}{5}\right)^2$. Pero $\left(5x - \frac{9}{5}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $25x^2 - 18x + 35 \neq \left(5x - \frac{9}{5}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

(Ver gráfico de la siguiente página)

$\left(5x - \dfrac{9}{5}\right)^2 =$	cuadrado del 1^{er} término;	menos el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$25x^2 - 18x + 35 \neq 25x^2 \quad - \quad 18x \quad + \quad \frac{81}{25}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $25x^2$ está en ambos lados; $-\ 18x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+\ 35$ que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $+\dfrac{81}{25}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\dfrac{81}{25}$ y sumar $+\ 35$ simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$25x^2 - 18x + 35 = \left(5x - \frac{9}{5}\right)^2 - \frac{81}{25} + 35$$

$$\boxed{25x^2 - 18x + 35 = \left(5x - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{794}{25}}$$

Ejemplo 4: Transformar el trinomio $9x^2 + 7x - 6$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Si $9x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $3x$.

Si $7x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $3x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo $7x \div 2 \div 3x = \frac{7}{6}$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$. Pero $\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $9x^2+7x-6 \neq \left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2 =$$

cuadrado del 1er término; | más el doble producto del 1º por el 2º; | más el cuadrado del 2º.

$$9x^2+7x-6 \neq 9x^2 + 7x + \frac{49}{36}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $9x^2$ está en ambos lados; $7x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un -6 que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $-\frac{49}{36}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\frac{49}{36}$ y sumar -6 simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$9x^2+7x-6=\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}-6$$

$$\boxed{9x^2+7x-6=\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{265}{36}}$$

Ejemplo 5: Transformar el trinomio $6x^2 + 5x + 8$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Si $6x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $\sqrt{6}\;x$.

Si $5x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $\sqrt{6}\;x$) por el segundo, éste se obtiene dividiendo $5x \div 2 \div \sqrt{6}\;x=\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(\sqrt{6}\;x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$. Pero $\left(\sqrt{6}\;x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $6x^2+5x+8\neq\left(\sqrt{6}\;x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\left(\sqrt{6}\,x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2 =$$

cuadrado del 1^{er} término;	más el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadra-do del 2º.

$$6x^2+5x+8 \neq 6x^2 + 5x + \frac{25}{24}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $6x^2$ está en ambos lados; $+\,5x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+\,8$ que no está en el lado derecho (hay que agregarlo allí para que se sean iguales); y además, en el lado derecho aparece un $+\dfrac{25}{24}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\dfrac{25}{24}$ y sumar + 8 simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$6x^2+5x+8=\left(\sqrt{6}\;x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2-\frac{25}{24}+8$$

$$\boxed{6x^2+5x+8=\left(\sqrt{6}\;x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2+\frac{167}{24}}$$

Ejemplo 6: Transformar el trinomio $48 - 24x - 9x^2$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Obsérvese que en este ejemplo, a diferencia de los anteriores, el término cuadrático es negativo. En casos así, debe encerrarse primero en un paréntesis negativo el trinomio para que se vuelva positivo el término al cuadrado y a partir de allí repetir lo que se ha hecho en los ejemplos antecedentes. Se finaliza eliminando el paréntesis negativo cambiando de signo a todo lo que contiene.

$$\begin{aligned} 48 - 24x - 9x^2 &= -\left(9x^2 + 24x - 48\right) \\ &= -\left[\left(3x+4\right)^2 - 64\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{48 - 24x - 9x^2 = 64 - \left(3x+4\right)^2}$$

APLICACIÓN A LAS INTEGRALES

Lo anterior es la práctica y habilidad algebraica que se requiere para poder realizar las integrales de la forma que se estudian en este capítulo. Entonces el procedimiento general para integrar funciones que contienen un polinomio cuadrático, ya sea con o sin raíz cuadrada, en el numerador o en el denominador, consiste en transformar dicho trinomio a la forma $(mx + n)^2 + h$, y por un cambio de variable reducirla a una de las fórmulas vistas en el capítulo anterior.

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{dx}{4x^2+36x+85}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx + n) + h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, se tiene que

$$\int \frac{dx}{4x^2+36x+85} = \int \frac{dx}{\left(2x+9\right)^2+4}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2 = (2x + 9)^2$, de donde
$u = 2x + 9$
$du = 2dx$
$a^2 = 4$
$a = 2$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 2 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\left(2x+9\right)^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

Se ha reducido a la fórmula (11) de la página 30. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\,arc\ tan\,\frac{u}{a}\right)+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,arc\ tan\,\frac{2x+9}{2}\right)+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{4x^2+36+85} = \frac{1}{4} arc\ tan \frac{2x+9}{2} + c}$$

COMPROBACIÓN:

Simplemente para abreviar, sea $I = \frac{1}{4} arc\ tan \frac{2x+9}{2} + c$ (el resultado de la integral). Entonces derivando:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx} arc\ tan \frac{2x+9}{2}\right) + \frac{d}{dx} c$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+9}{2}\right)}{\left(\frac{2x+9}{2}\right)^2 + 1}\right] + 0$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{4x^2+36x+81}{4} + 1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{4x^2+36x+81+4}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x^2+36x+85}\right]$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \frac{1}{4x^2+36x+85}}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx + n) + h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2 = (3x - 1)^2$, de donde
$u = 3x - 1$
$du = 3dx$
$a^2 = 1$
$a = 1$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 3 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

Se ha reducido a la fórmula (14) de la página 30. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{3}\left[ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\right]+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral, en donde conviene considerar que en este tipo de integrales, siempre que exista originalmente una raíz cuadrada, al sustituir en la fórmula se obtiene la raíz cuadrada original, por lo que:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \frac{1}{3}ln\left[\left(3x-1\right)+\sqrt{9x^2-6x+2}\ \right]+c}$$

Ejemplo 9: Integrar $\int \sqrt{45-20x-25x^2}\ \ dx$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx + n) + h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, ver ejemplo 6 de la página 46, se tiene que

$$\int \sqrt{45-20x-25x^2}\ \ dx = \int \sqrt{49-\left(5x+2\right)^2}\ \ dx$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2 = (5x + 2)^2$, de donde
$u = 5x + 2$
$du = 5dx$
$a^2 = 49$
$a = 7$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 5 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{49-\left(5x+2\right)^2}\; 5\,dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{a^2-u^2}\; du$$

Se ha reducido a la fórmula (10) de la página 30. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{a^2-u^2}\; du = \frac{1}{5}\left[\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\, arc\ sen \frac{u}{a}\right] + c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral, en donde conviene considerar que en este tipo de integrales, siempre que exista originalmente una raíz cuadrada, al sustituir en la fórmula se obtiene la raíz cuadrada original, por lo que:

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x+2}{2}\sqrt{45-20x-25x^2} + \frac{49}{2}\, arc\ sen \frac{5x+2}{7}\right] + c$$

$$\boxed{\int \sqrt{45-20x-25x^2}\; dx = \frac{5x+2}{10}\sqrt{45-20x-25x^2} + \frac{49}{10}\, arc\ sen \frac{5x+2}{7} + c}$$

Ejemplo 10: Integrar $\int \frac{dx}{2x^2+5x+3}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx + n) + h$, conforme a lo practicado en los ejemplos 1 a 6, se tiene que

$$\int \frac{dx}{2x^2+5x+3} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$$u^2 = \left(\sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \text{, de donde}$$

$$u = \sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$du = \sqrt{2}\ dx$$

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{4(2)}} = \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por $\sqrt{2}$ para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\ dx}{\left(\sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Se ha reducido a la fórmula (12) de la página 30. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2a}ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right]+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral:

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}ln\left(\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)\right]+c$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,ln\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{4}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{6}{2\sqrt{2}}}+c$$

$$=ln\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{3}{\sqrt{2}}}+c$$

Para eliminar los denominadores parciales $\sqrt{2}$ que aparecen en el numerador y en el denominador del argumento del logaritmo natural, deben multiplicarse al mismo tiempo numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$=ln\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,x+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{2x^2+5x+3} = ln\frac{2x+2}{2x+3}+c}$$

COMPROBACIÓN:

Simplemente para abreviar, sea $I = ln\frac{2x+2}{2x+3}+c$ (el resultado de la integral). Entonces derivando:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+2}{2x+3}\right)}{\frac{2x+2}{2x+3}} + 0$$

$$= \frac{\frac{2(2x+3)-2(2x+2)}{(2x+3)^2}}{\frac{2x+2}{2x+3}}$$

$$= \frac{\frac{4x+6-4x-4}{(2x+3)^2}}{\frac{2x+2}{2x+3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{(2x+3)^2}}{\frac{2x+2}{2x+3}}$$

$$= \frac{2\left(2x+3\right)}{\left(2x+3\right)^2\left(2x+2\right)}$$

$$= \frac{2\left(2x+3\right)}{2\left(2x+3\right)^2\left(x+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(2x+3\right)\left(x+1\right)}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \frac{1}{2x^2+5x+3}}$$

EJERCICIO 23 (Áreas 1, 2 y 3)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{25x^2+10x+10}$

2) $\int \frac{dx}{16x^2-24x-7}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-42x+50}}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-20x+50}}$

5) $\int \sqrt{4x^2-28x-32}\, dx$

6) $\int \sqrt{36x^2+12x+10}\, dx$

7) $\int \frac{dx}{36x^2+60x-11}$

8) $\int \frac{dx}{64x^2+144x+162}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{72-6x-x^2}}$

10) $\int \sqrt{20x-4x^2-24}$

11) $\int \frac{dx}{117+12x-9x^2}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{168-20x-100x^2}}$

Área 2:

13) $\int \sqrt{25x^2+18x-8}\, dx$

14) $\int \frac{dx}{4x^2-14x-1}$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 7x - 2}}$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{49x^2 + 9x - 6}$

17) $\displaystyle\int \sqrt{3x^2 + x + 9}\; dx$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2 + 11x - 13}$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 11x + 22}}$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{8x^2 - 19x}$

21) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 17x}\; dx$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{12x^2 + x - 8}$

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{15x^2 + 11x}$

24) $\displaystyle\int \sqrt{7x^2 + 7}\; dx$

VI

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int (mx+n)\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{k}{2}} dx \text{ , con } k = \pm 1, -2$$

Área 2

Estas integrales difieren de las vistas en el capítulo anterior solamente en el binomio $mx + n$ que debe aparecer en el numerador con exponente 1. Ejemplos de integrales de esta forma son:

$$\int (2x-5)\sqrt{4x^2 - x + 6}\, dx$$

$$\int \frac{(5x+12)dx}{9x^2 + 18x - 21}$$

$$\int \frac{(8x-1)dx}{\sqrt{16x^2 + 21x - 1}}$$

La técnica para integrar estas funciones consiste en hacer primero el cambio de variable del trinomio cuadrático $u = ax^2 + bx + c$, a partir del cual se calcula la diferencial $du = (2ax + b)dx$. Como el polinomio $2ax + b$ de esta diferencial es de la misma forma que el binomio $mx + n$ del numerador de la integral original, a base de multiplicaciones y sumas, con sus respectivas operaciones inversas (divisiones y restas) para que no se altere, debe transformarse el binomio original $mx + n$ en el polinomio $2ax + b$ de la diferencial de *u*. Una vez logrado, la integral resultante se parte en dos integrales, las cuales ya se pueden realizar por alguno de los métodos ya estudiados hasta ahora.

En síntesis:

Para integrar funciones de la forma $\int (mx+n)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx$ **, con *k* = ± 1, - 2:**

a) Hágase $u = ax^2 + bx + c$.

b) Obténgase la diferencial $du = (2ax + b)dx$**.**

c) Multiplíquese y divídase simultáneamente la integral original por $\dfrac{2a}{m}$ **:**

$$\frac{m}{2a}\int \frac{2a}{m}(mx+n)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\int \left(2ax+\frac{2an}{m}\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx$$

d) Súmese y réstese b **en el binomio:**

$$\frac{m}{2a}\int \left(2ax+b-b+\frac{2an}{m}\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx$$

e) Pártase en dos integrales:

$$\frac{m}{2a}\int (2ax+b)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx +$$

$$+\frac{m}{2a}\int \left(\frac{2an}{m}-b\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k/2} dx$$

Ejemplo 1: Integrar $\displaystyle\int \frac{(27x-8)\,dx}{81x^2+36x+8}$

Solución: Sea $u = 81x^2 + 36x + 8$, de donde
$du = (162x + 36)\,dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por 6, se obtiene como primer término $162x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{1}{6}\int \frac{6(27x-8)\,dx}{81x^2+36x+8} = \frac{1}{6}\int \frac{(162x-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

Ahora debe sumarse (y restarse) $+36$ al mismo binomio:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{(162x+36-36-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{(162x+36)\,dx}{81x^2+36x+8} + \frac{1}{6}\int \frac{(-36-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} - \frac{84}{6}\int \frac{dx}{81x^2+36x+8}$$

Como la 2ª integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior, se tiene que

$$= \frac{1}{6} ln\, u - 14\int \frac{dx}{\left(9x+2\right)^2 + 4}$$

$v^2 = (9x + 2)^2$ de donde:
$v = 9x + 2$
$dv = 9\ dx$
$a^2 = 4$
$a = 2$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{14}{9}\int \frac{9\,dx}{\left(9x+2\right)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{14}{9}\int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{14}{9}\left[\frac{1}{a} arc\ tan \frac{u}{a}\right] + c$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{14}{9}\left[\frac{1}{2} arc\ tan \frac{9x+2}{2}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{\left(27x-8\right)dx}{81x^2 + 36x + 8} = \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{7}{9} arc\ tan \frac{9x+2}{2} + c}$$

COMPROBACIÓN:

Para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = \frac{1}{6} ln\left(81x^2 + 36x + 8\right) - \frac{7}{9} arc\ tan \frac{9x+2}{2} + c$.

Entonces

$$\frac{dI}{dx}=\frac{1}{6}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(81x^2+36x+8\right)}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{9}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{9x+2}{2}\right)}{\left(\frac{9x+2}{2}\right)^2+1}\right]+0$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{162x+36}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{9}\left[\frac{\frac{9}{2}}{\frac{81x^2+36x+4}{4}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{6(27x+6)}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{2}\left[\frac{1}{\frac{81x^2+36x+4+4}{4}}\right]$$

$$=\frac{27x+6}{81x^2+36x+8}-\frac{7}{2}\left[\frac{4}{81x^2+36x+8}\right]$$

$$=\frac{27x+6}{81x^2+36x+8}-\frac{14}{81x^2+36x+8}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx}=\frac{27x-8}{81x^2+36x+8}}$$

Ejemplo 2: Integrar $\displaystyle\int \frac{(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21}$

Solución: Sea $u = 16x^2 + 40x + 21$, de donde
$du = (32x + 40)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $\dfrac{32}{5}$, se obtiene como primer término $32x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{5}{32}\int \frac{\frac{32}{5}(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21} = \frac{5}{32}\int \frac{\left(32x-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

Ahora debe sumarse y restarse $+40$ (ver du) al mismo binomio para obtener du:

$$= \frac{5}{32}\int \frac{\left(32x+40-40-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

$$= \frac{5}{32}\int \frac{(32x+40)\,dx}{16x^2+40x+21} + \frac{5}{32}\int \frac{\left(-40-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= \frac{5}{32}\int \frac{du}{u} - \left(\frac{5}{32}\right)\left(-\frac{232}{5}\right)\int \frac{dx}{16x^2+40x+21}$$

$$= \frac{5}{32}\int \frac{du}{u} - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{16x^2+40x+21}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior; la primera ya es de fórmula, de modo que

$$= \frac{5}{32} ln\, u - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{\left(4x+5\right)^2-4}$$

$v^2 = (4x + 5)^2$ de donde:
$v = 4x + 5$
$dv = 4\, dx$
$a^2 = 4$
$a = 2$

$$= \frac{5}{32} ln\, u - \frac{29}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\int \frac{4\,dx}{\left(4x+5\right)^2-4}$$

$$= \frac{5}{32} ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\int \frac{du}{u^2-a^2}$$

$$= \frac{5}{32} ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right] + c$$

$$= \frac{5}{32} ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\left[\frac{1}{2(2)} ln\left(\frac{4x+5-2}{4x+5+2}\right)\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21} = \frac{5}{32} ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{64} ln\left(\frac{4x+3}{4x+7}\right) + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$

Solución: Sea $u = 3 - 6x - 9x^2$, de donde
$du = (-18x - 6)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $-\frac{18}{7}$, se obtiene como primer término $-18x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$-\frac{7}{18}\int \frac{-\frac{18}{7}(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}} = -\frac{7}{18}\int \frac{\left(-18x+\frac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

Ahora debe restarse (y sumarse) 6 al mismo binomio para obtener du:

$$= -\frac{7}{18}\int \frac{\left(-18x-6+6+\frac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

$$= -\frac{7}{18}\int \frac{\left(-18x-6\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}} - \frac{7}{18}\int \frac{\left(6+\dfrac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es $\sqrt{u}$ (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= -\frac{7}{18}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{7}{18}\left(\frac{150}{7}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior:

$$= -\frac{7}{18}\int u^{-\frac{1}{2}}du - \frac{25}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(3x+1\right)^2}}$$

$v^2 = (3x + 1)^2$ de donde:
$v = 3x + 1$
$dv = 3\ dx$
$a^2 = 2$
$a = 2$

$$= -\frac{7}{18}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] - \frac{25}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\int \frac{3\,dx}{\sqrt{4-\left(3x+1\right)^2}}$$

$$= -\frac{7}{18}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] - \frac{25}{9}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$= -\frac{7}{18}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{25}{9}\left[arc\ sen\frac{u}{a}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}} = -\frac{7}{9}\sqrt{3-6x-9x^2} - \frac{25}{9}arc\ sen\frac{3x+1}{2} + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int \frac{(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39}$

Solución: Sea $u = 5x^2 + 6x - 39$, de donde
$du = (10x + 6)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $\frac{10}{11}$, se obtiene como primer término $10x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{11}{10}\int \frac{\frac{10}{11}(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39} = \frac{11}{10}\int \frac{\left(10x+\frac{20}{11}\right)dx}{5x^2+6x-39}$$

Ahora debe sumarse (y restarse) 6 al mismo binomio para obtener du:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{\left(10x + 6 - 6 + \dfrac{20}{11}\right)dx}{5x^2 + 6x - 39}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{(10x+6)\,dx}{5x^2+6x-39} + \frac{11}{10}\int \frac{\left(-6+\dfrac{20}{11}\right)dx}{5x^2+6x-39}$$

$$= \frac{11}{10}\int \frac{(10x+6)\,dx}{5x^2+6x-39} + \frac{11}{10}\int \frac{-\dfrac{46}{11}\,dx}{5x^2+6x-39}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{du}{u} - \frac{23}{5}\int \frac{dx}{5x^2+6x-39}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{du}{u} - \frac{23}{5}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\;x + \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \dfrac{204}{5}}$$

$$v^2 = \left(\sqrt{5}\;x + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \qquad \text{de donde:}$$

$$v=\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$dv=\sqrt{5}\,dx$$

$$a^2=\frac{204}{5}$$

$$a=\sqrt{\frac{204}{5}}$$

$$=\frac{11}{10}\ln u\;-\frac{23}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\int\frac{\sqrt{5}\,dx}{\left(\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{204}{5}}$$

$$=\frac{11}{10}\ln\left(5x^2+6x-39\right)\;-\;\frac{23}{5\sqrt{5}}\int\frac{du}{u^2-a^2}$$

$$=\frac{11}{10}\ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right]+c$$

$$=\frac{11}{10}\ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{204}{5}}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{204}{5}}}{\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{204}{5}}}\right)\right]+c$$

$$=\frac{11}{10}\ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{204}}\ln\frac{\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}}\right]+c$$

Para eliminar el denominador parcial $\sqrt{5}$ que aparece en el numerador y denominador del argumento del logaritmo natural de la segunda integral, basta multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{5}$:

$$=\frac{11}{10} ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{10\sqrt{204}} ln\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}\right)}+c$$

$$\boxed{\int \frac{(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39}=\frac{11}{10} ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{10\sqrt{204}} ln\left(\frac{5x+3-\sqrt{204}}{5x+3+\sqrt{204}}\right)+c}$$

EJERCICIO 24 (Área 2)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int \dfrac{(2x-7)\,dx}{81x^2+36x+5}$

2) $\int \dfrac{(4x-11)\,dx}{23+44x-4x^2}$

3) $\int \dfrac{(2x+17)\,dx}{4x^2-28x+33}$

4) $\int \dfrac{(7x-2)\,dx}{9x^2+60x+125}$

5) $\int \dfrac{(9x-1)\,dx}{16x^2-56x-15}$

6) $\int \dfrac{(13x+11)\,dx}{45-12x-x^2}$

7) $\int \dfrac{(17x+13)\,dx}{\sqrt{25x^2-10x+2}}$

8) $\int \dfrac{(6x+13)\,dx}{\sqrt{36x^2+60x-75}}$

9) $\int \dfrac{(9x-7)\,dx}{\sqrt{35+12x-36x^2}}$

10) $\int (x-9)\sqrt{9x^2-7x}\;dx$

11) $\int \dfrac{(x+6)\,dx}{\sqrt{25x^2-11x+5}}$

12) $\int \dfrac{3x\,dx}{6x^2-24x-5}$

13) $\int \dfrac{(7x+9)\,dx}{\sqrt{2x^2+3x-13}}$

14) $\int 6x\sqrt{10+10x-13x^2}\;dx$

15) $\int \dfrac{(5-2x)\,dx}{8x^2+7x-6}$

16) $\int \dfrac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{5-x-x^2}}$

VII

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Áreas 1, 2 y 3

Diez fórmulas más habrán de agregarse al formulario actual de integrales del estudiante. Son seis correspondientes a las seis funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, y cuatro más correspondientes a las inversas de las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Esto último se refiere a que si la derivada de la tangente es la secante cuadrada, entonces la integral de la secante cuadrada es la tangente.

(17) $$\int sen\, u\, du = -\cos u + c$$

(18) $$\int \cos u\, du = sen\, u + c$$

(19) $$\int \tan u\, du = \ln \sec u = -\ln \cos u + c$$

(20) $$\int \cot u\, du = \ln sen\, u + c$$

(21) $$\int \sec u\, du = \ln\left(\tan u + \sec u\right) + c$$

(22) $\int \csc u \, du = \ln(\csc u - \cot u) + c$

(23) $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$

(24) $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$

(25) $\int \tan u \sec u \, du = \sec u + c$

(26) $\int \cot u \csc u \, du = -\csc u + c$

Como en todos los casos de fórmulas nuevas, para emplearlas debidamente debe hacerse un cambio de variable, en donde u es el argumento de la función trigonométrica.

Ejemplo 1: Integrar $\int sen\, 9x \, dx$

Solución: En este caso el argumento es $9x$, o sea que

$u = 9x$, de donde

$du = 9dx$

Para tener la diferencial du hay que multiplicar por 9; pero para que no se altere la integral original también debe dividirse entre 9, de modo que:

$$\int sen\, 9x \, dx = \frac{1}{9} \int \underbrace{sen\, 9x}_{sen\, u} \underbrace{[9\, dx]}_{du}$$

$$= \frac{1}{9}\int sen\, u\, du = \frac{1}{9}\left[-\cos u\right] + c$$

$$\boxed{\int sen\, 9x\, dx = -\frac{1}{9}\cos 9x + c}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int (3x-2)\tan\left(3x^2 - 4x + 11\right) dx$

Solución: En este caso el argumento es $3x^2 - 4x + 11$, o sea que

$u = 3x^2 - 4x + 11$, de donde
$du = (6x - 4)dx$

Para tener la diferencial du hay que multiplicar por 2; pero para que no se altere la integral original también debe dividirse entre 2, de modo que:

$$\int (3x-2)\tan\left(3x^2-4x+11\right) = \frac{1}{2}\int \tan\left(3x^2-4x+11\right)\left[2(3x-2)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{\tan\left(3x^2-4x+11\right)}_{\tan u}\underbrace{(6x-4)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\ln \sec u + c$$

$$\boxed{\int (3x-2)\tan\left(3x^2-4x+11\right)dx = \frac{1}{2}\ln\sec\left(3x^2-4x+11\right)+c}$$

COMPROBACIÓN:

Para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = \frac{1}{2}\ln\sec\left(3x^2-4x+11\right)+c$.

Entonces

$$\frac{dI}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d}{dx}\sec\left(3x^2-4x+11\right)}{\sec\left(3x^2-4x+11\right)}\right]+0$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\tan\left(3x^2-4x+11\right)\sec\left(3x^2-4x+11\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2-4x+11\right)}{\sec\left(3x^2-4x+11\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\tan\left(3x^2-4x+11\right)\sec\left(3x^2-4x+11\right)\left[\left(6x-4\right)\right]}{\sec\left(3x^2-4x+11\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}\left(3x-2\right)\tan\left(3x^2-4x+11\right)\cancel{\sec\left(3x^2-4x+11\right)}}{\cancel{\sec\left(3x^2-4x+11\right)}}\right]$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = (3x-2)\tan\left(3x^2 - 4x + 11\right)}$$

EJERCICIO 25 (Áreas 1, 2 y 3)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int sen\, 13x\, dx$

2) $\int cos\, 4x\, dx$

3) $\int tan(4-9x)\, dx$

4) $\int cot\,(17x+6)\, dx$

5) $\int sec\,(11x+12)\, dx$

6) $\int csc\,(1-5x)\, dx$

7) $\int (x-5)\, sen\left(x^2 - 10x + 1\right) dx$

8) $\int (3x+3)\, cos\left(5x^2 + 10x + 10\right) dx$

9) $\int (2x-3)\, tan\left(7x^2 - 21x + 9\right) dx$

10) $\int \left(x^2 + 6x\right) cot\left(x^3 + 9x^2 - 15\right) dx$

11) $\int \left(6x^2 - 6x + 3\right) sec\left(8x^3 - 12x^2 + 12x - 13\right) dx$

12) $\int \frac{5}{\sqrt{2x}}\, sen\sqrt{2x}\; dx$

13) $\int \frac{7}{x^2}\, cos\left(\frac{3}{x}\right) dx$

14) $\int \frac{11}{x^3}\, tan\left(\frac{9}{x^2}\right) dx$

15) $\int \frac{2}{x^4}\, csc\left(\frac{5}{x^3}\right) dx$

TÉCNICAS Y RECURSOS DE INTEGRACIÓN (Área 2)

Para integrar cualquier otra función trigonométrica que no pueda resolverse con un simple cambio de variable, tales como las estudiadas en las páginas precedentes de este capítulo, deben emplearse diferentes técnicas y recursos algebraicos para reducir la función original a una forma equivalente ya integrable.

Independientemente de la técnica o recurso que se emplee, es necesario tener a la mano las siguientes fórmulas o identidades trigonométricas:

(1) $sen^2 A + cos^2 A = 1$

(2) $tan^2 A + 1 = sec^2 A$

(3) $cot^2 A + 1 = csc^2 A$

(4) $sen\ A = \dfrac{1}{csc\ A}$

(5) $cos\ A = \dfrac{1}{sec\ A}$

(6) $tan\ A = \dfrac{1}{cot\ A}$

(7) $cot\ A = \dfrac{1}{tan\ A}$

(8) $sec\ A = \dfrac{1}{cos\ A}$

(9) $csc\ A = \dfrac{1}{sen\ A}$

(10) $tan\ A = \dfrac{sen\ A}{cos\ A}$

(11) $cot\ A = \dfrac{cos\ A}{sen\ A}$

(12) $sen^2 A = \dfrac{1}{2}\left(1 - cos\ 2A\right)$

(13) $cos^2\ A = \dfrac{1}{2}\left(1 + cos\ 2A\right)$

(14) $sen\ 2A = 2\ sen\ A\ cos\ A$

(15) $cos\ 2A\ =\ cos^2\ A - sen^2 A\ =\ 1 - sen^2 A\ =\ 2\ cos^2\ A - 1$

Igualmente, deben tenerse presentes algunas normas generales para evitar transformar la integral original en otra función más complicada:

a) Si la función a integrar está compuesta por dos o más factores trigonométricos, éstos deben tener el mismo argumento; de lo contrario, mientras no se igualen los argumentos no se podrá integrar.

   Por ejemplo, la integral $\int sen\ 2x\ tan\ 4x\ dx$ no se podrá integrar mientras no se igualen los argumentos del seno con el de la tangente.

b) Debe evitarse pasar de una integral del *seno* a otra del *coseno* de la misma forma, porque se considera que una y otra son lo mismo en cuanto a su técnica de integración.

Por ejemplo, si se tiene la integral $\int sen^2 x\, dx$ y se emplea la fórmula trigonométrica (1) para establecer que $\int sen^2 x\, dx = \int \left(1 - cos^2 x\right) dx = \int dx - \int cos^2 x\, dx$, como se pasó de la integral $\int sen^2 x\, dx$ a la integral $\int cos^2 x\, dx$ se considera que no se avanzó absolutamente nada porque son de la misma forma.

c) Cuando deba emplearse más de una vez la técnica de los cuadrados, debe seguirse siempre el mismo criterio porque de lo contrario se regresa a la integral original. Emplear el mismo criterio significa utilizar siempre la misma función trigonométrica al cuadrado para sustituirla por su equivalente de dos términos, no una vez una y otra vez otra.

d) Para integrar $\int sen^m v\, cos^n v\, dv$:

i) Si $m = n$, debe emplearse la fórmula trigonométrica (14) en la que, despejando, se llega a que

$$sen\, A\, cos\, A = \frac{1}{2}\, sen\, 2A\,,$$

por lo que

$$sen^2 A\, cos^2 A = \left(\frac{1}{2}\, sen\, 2A\right)^2$$

$$sen^3 A\, cos^3 A = \left(\frac{1}{2}\, sen\, 2A\right)^3 \quad \text{, etc.}$$

ii) Si $m = 1$ o bien $n = 1$, con el cambio de variable u igual a la función trigonométrica con exponente diferente de 1, se resuelve.

iii) En cualquier otro caso, utilizar la técnica de los cuadrados para partir en dos la integral.

Las principales técnicas son:

a) Técnica de los cuadrados.
b) Técnica de pasar a senos y/o cosenos.
c) Técnica de los binomios conjugados.

a) **Técnica de los cuadrados:** Consiste en factorizar una potencia trigonométrica en un factor al cuadrado multiplicado por lo que quede; ese factor al cuadrado se reemplaza por su equivalente de dos términos para partir en dos la integral original.

Como en casi todas las integrales de las diferentes potencias de las seis funciones trigonométricas se emplea la técnica de los cuadrados, en el siguiente bloque de ejemplos se mostrará la técnica para integrar el seno al cuadrado, el seno al cubo, el seno a la cuarta potencia, etc; lo mismo con la tangente y con la secante.

Ejemplo 3: Integrar $\int sen^2 x\, dx$

Solución: Si se emplea la técnica de los cuadrados se tienen dos opciones: $sen^2 x = 1 - cos^2 x$ (despejando de la fórmula (1), página 77) o bien hacer $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2x)$, según la fórmula (12). Pero como ya se vio en el ejemplo del inciso (b) de la página 79, la primera relación no debe emplearse porque se pasa de una forma a otra igual. Entonces

$$\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos\, 2x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx \; - \; \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

La primera integral ya es de fórmula. Para la segunda integral, sea $u = 2x$, de donde $du = 2dx$. Así que multiplicando y dividiendo por 2 al mismo tiempo para que no se altere la integral original:

$$= \frac{1}{2} \int dx \; - \; \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int \cos 2x \left(2\, dx \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int dx \; - \; \frac{1}{4} \int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} u + c$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

Solución: Empleando la técnica de los cuadrados, se factoriza el seno cúbico en seno cuadrado por seno. El seno cuadrado se sustituye por su equivalente de dos términos $(1 - \cos^2 x)$, tomando en cuenta la norma del inciso (a), página 78, se multiplica y luego se parte en dos integrales:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int \left(1 - cos^2\ x\right) sen\ x\ dx$$

$$= \int\ sen\ x\ dx - \int\ cos^2\ x\ sen\ x\ dx$$

$u = cos\ x$
$du = -\ sen\ x\ dx$

La primera integral ya es de fórmula. La segunda integral es de la forma señalada en el inciso (d) de la página 79 y cumple con el requisito del subinciso (ii). De manera que se hace el cambio de variable indicado para obtener

$$= \int\ sen\, x\ dx + \int\ u^2 du$$

$$= -\ cos\, x + \frac{u^3}{3} + c$$

$$\boxed{\int\ sen^3 x\ dx = -\ cos\ x + \frac{1}{3} cos^3\ x + c}$$

Ejemplo 5: Integrar $\int\ sen^4 x\ dx$

Solución: Empleando la técnica de los cuadrados se factoriza el seno cuarto en seno cuadrado por seno cuadrado, es decir $sen^4 x = sen^2 x\ sen^2 x$. Debe tenerse cuidado en que esta técnica señala que un factor al cuadrado (y solamente uno) es el que debe sustituirse por su equivalente de dos términos, no los dos factores al cuadrado. De modo que

$$\begin{aligned}\int sen^4 x\, dx &= \int sen^2 x\, sen^2 x\, dx\\ &= \int \left(1 - cos^2 x\right) sen^2 x\, dx\\ &= \int sen^2 x\, dx - \int sen^2 x\, cos^2 x\, dx\end{aligned}$$

La segunda integral es de la forma marcada en el inciso (d) de la página 79 y cumple con el requisito del subinciso (i), por lo que debe emplearse la fórmula (14) de la página 78:

$$= \int sen^2 x\, dx - \int \left(\frac{1}{2} sen\ 2x\right)^2 dx$$

$$= \int sen^2 x\, dx - \frac{1}{4}\int sen^2 2x\, dx$$

Ambas integrales son el seno al cuadrado, solamente que con diferente argumento. Se integran como se mostró en el ejemplo 3 de la página 80:

$$= \int \frac{1}{2}\left(1 - cos\ 2x\right) dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\left(1 - cos\ 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos\ 2x\, dx - \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos\ 4x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x - \frac{x}{8} + \frac{1}{32} sen\ 4x + c$$

$$\boxed{\int sen^4 x\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} sen\ 2x + \frac{1}{32} sen\ 4x + c}$$

Ejemplo 6: Integrar $\int sen^5 x\, dx$

Solución: Empleando la técnica de los cuadrados se factoriza el seno quinto en seno cuadrado por seno cúbico, es decir $sen^5 x = sen^2 x\; sen^3 x$. De modo que

$$\int sen^5 x\, dx = \int sen^2 x\; sen^3 x\, dx$$

$$= \int \left(1 - cos^2 x\right) sen^3 x\, dx$$

$$= \int sen^3 x\, dx - \int cos^2 x\; sen^3 x\, dx$$

La primera integral se resolvió en el ejemplo 4 página 81, por lo que ya solamente se copiará su resultado. La segunda integral pertenece a la condición del inciso (d), subinciso (iii), página 79/80, por lo que se debe volver a utilizar la técnica de los cuadrados con el mismo criterio, es decir que si anteriormente se factorizó para obtener un seno al cuadrado para sustituirlo por su equivalente de dos términos, ahora nuevamente debe factorizarse un seno al cuadrado y reemplazarlo por su equivalente de dos términos. Haciéndolo se obtiene:

$$= \int sen^3 x\, dx - \int cos^2 x\; sen\, x\; sen^2 x\, dx$$

$$= \int sen^3 x\, dx - \int cos^2 x\; sen\, x \left(1 - cos^2 x\right) dx$$

$$= \int sen^3 x\, dx - \int cos^2 x\, sen\, x\, dx + \int cos^4 x\, sen\, x\, dx$$

La segunda y tercera integrales corresponden a la condición del inciso (d), subinciso (ii), página 79/80, por lo que con un cambio de variable se puede integrar. Haciendo

$$u = cos\, x$$
$$du = -\, sen\, x\, dx$$

$$= \int sen^3 x\, dx + \int u^2 du - \int u^4 du$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

$$\boxed{\int sen^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c}$$

Ejemplo 7: Integrar $\int \tan^2 x\, dx$

Solución: Por la técnica de los cuadrados, sabiendo que $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int dx$$

Estas dos integrales ya son directas de fórmula, así que

$$\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x + c$$

Por las reglas de escritura matemática no debe escribirse así, sino

$$\boxed{\int \tan^2 x\, dx = -x + \tan x + c}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int tan^3 x\, dx$

Solución: Por la técnica de los cuadrados, debe factorizarse en tangente cuadrada por lo demás, y sustituir la tangente cuadrada por su equivalente de dos términos $(sec^2 x - 1)$:

$$= \int tan^2 x \tan x\, dx$$

$$= \int \left(sec^2 x - 1\right) tan\, x\, dx$$

$$= \int sec^2 x \tan x\, dx - \int tan\, x\, dx$$

La primera integral se resuelve con el cambio de variable $u = tan\, x$, ya que $du = sec^2 x$. La segunda integral ya es de fórmula. Así que

$$= \int u\, du - \int tan\, x\, dx$$

$$= \frac{u^2}{2} - ln\ sec\ x + c$$

$$\boxed{\int tan^3 x\, dx = \frac{1}{2} tan^2 x - ln\ secx + c}$$

Ejemplo 9: Integrar $\int tan^4 x\, dx$

Solución: Por la técnica de los cuadrados, debe factorizarse en tangente cuadrada por lo demás, y sustituir la tangente cuadrada (y solamente una, no las dos) por su equivalente de dos términos:

$$\int tan^4 x\, dx = \int tan^2 x\, tan^2 x\, dx$$

$$= \int \left(sec^2 x - 1\right) tan^2 x\, dx$$

$$= \int sec^2 x\, tan^2 x\, dx - \int tan^2 x\, dx$$

Para la primera integral basta con hacer el cambio de variable $u = tan\, x$, ya que derivando se obtiene que $du = sec^2 x\, dx$, y la segunda integral fue resuelta en el ejemplo 7:

$$= \int u^2 du - \int tan^2 x\, dx$$

$$= \frac{u^3}{3} - \left(-x + tan\, x\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 x + x - tan\, x + c$$

que debe escribirse, conforme a las reglas de escritura matemática como

$$\boxed{\int tan^4 x\, dx = x + \frac{1}{3} tan^3 x - tan\, x + c}$$

Ejemplo 10: $\int tan^5 x\, dx$

Solución: Por la técnica de los cuadrados, debe factorizarse en tangente cuadrada por lo demás, y sustituir la tangente cuadrada por su equivalente de dos términos $(sec^2 x - 1)$:

$$\int tan^5 x\, dx = \int tan^2 x\, tan^3 x\, dx$$

$$= \int \left(sec^2 x - 1\right) tan^3 x\, dx$$

$$= \int sec^2 x\, tan^3 x\, dx - \int tan^3 x\, dx$$

Para la primera integral basta hacer el cambio de variable $u = tan\, x$, de donde derivando se obtiene $du = sec^2 x\, dx$. La segunda integral fue resuelta en el ejemplo 8:

$$= \int u^3 du - \int tan^3 x\, dx$$

$$= \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} tan^2 x + ln\, sec\, x + c$$

$$\boxed{\int tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x + ln\, sec\, x + c}$$

COMPROBACIÓN:

Para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x + ln\, sec\, x + c$.

Entonces

$$\frac{dI}{dx} = \frac{1}{4}\left[4(tan\, x)^{4-1} \frac{d}{dx} tan\, x\right] - \frac{1}{2}\left[2(tan\, x)^{2-1} \frac{d}{dx} tan\, x\right] + \frac{tan\, x\, sec\, x}{sec\, x} + 0$$

$$= tan^3 x\left[sec^2 x \frac{d}{dx} x\right] - tan\, x\left[sec^2 x \frac{d}{dx} x\right] + tan\, x$$

$$= tan^3 x\, sec^2 x - tan\, x\, sec^2 x + tan\, x$$

$$= tan^3 x\left[tan^2 x + 1\right] - tan\, x\left[tan^2 x + 1\right] + tan\, x$$

$$= tan^5 x + tan^3 x - tan^3 x - tan\, x + tan\, x$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = tan^5\, x}$$

Ejemplo 11: Integrar $\int sec^2\, x\, dx$

Solución: Esta integral es directa de fórmula. Basta aplicar la fórmula (23) de la página 73.

$$\boxed{\int sec^2\, x\, dx = tan\, x + c}$$

Ejemplo 12: Integrar $\int sec^3\, x\, dx$

Solución: Todas las potencias nones de la secante y de la cosecante solamente se pueden integrar por el método llamado *integración por partes*, que se verá en el próximo capítulo (ejemplo 4, página 108). De manera que queda pendiente de integrarse hasta que se aborde en el capítulo siguiente la integración por partes.

Ejemplo 13: Integrar $\int sec^4\, x\, dx$

Solución: Por la técnica de los cuadrados, se factoriza en secante cuadrada por secante cuadrada. De la misma forma en que se hizo con el seno a la cuarta y la tangente a la cuarta, solamente el primer factor al cuadrado debe sustituirse por su equivalente de dos términos:

$$\int sec^4\, x\, dx = \int sec^2\, x\, sec^2\, x\, dx$$

$$= \int \left(tan^2\, x + 1\right) sec^2\, x\, dx$$

$$= \int tan^2\, x\, sec^2\, x\, dx + \int sec^2\, x\, dx$$

Para la primera integral basta hacer el cambio de variable $u = tan\, x$, de donde $du = sec^2 x$; la segunda integral ya es directa de fórmula:

$$= \int u^2 du + \int sec^2\, x\, dx$$

$$= \frac{u^3}{3} + tan\, x + c$$

$$\boxed{\int sec^4\, x\, dx = \frac{1}{3} tan^3\, x + tan\, x + c}$$

b) **Técnica de pasar todo a senos y/o cosenos:** Consiste en pasar o escribir todas las funciones trigonométricas en términos de senos y/o cosenos, a partir de que todas las funciones trigonométricas tienen un equivalente en senos y/o cosenos, ya que

$$tan\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$

$$cot\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$$

$$sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$$

$$csc\, x = \frac{1}{sen\, x}$$

Después de escribir todo en términos del seno y/o coseno, se simplifica y se vuelve a apli car la técnica de los cuadrados, si las integrales resultantes no están aún listas para ya integrarse.

Ejemplo 14: $\int \frac{sen^2 x \cot x}{\sec x} dx$

Solución: Pasando todo a senos y/o cosenos:

$$\int \frac{sen^2 x \cot x}{\sec x} dx = \int \frac{sen^2 x \frac{\cos x}{senx}}{\frac{1}{\cos x}} dx$$

$$= \int \frac{sen^2 x \cos x \cos x}{sen\ x} dx$$

$$= \int sen\ x \cos^2 x\ dx$$

Esta integral es de la forma especificada en el inciso (d), subinciso (ii), páginas 79/80, por lo que con un cambio de variable se puede integrar. En efecto, haciendo

$u = \cos x$, de donde
$du = -\ sen\ x\ dx$

$$= -\int (\cos x)^2 (-\ sen\ x\ dx)$$

$$= -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c$$

$$\boxed{\int \frac{sen^2 x \cot x}{sec\ x} dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c}$$

Ejemplo 15: Integrar $\displaystyle\int \frac{\tan x \cos x \cot x\, sen^2\, x}{\sec^2\, x \csc x}\, dx$

Solución: Pasando todo a senos y/o cosenos:

$$\int \frac{\tan x \cos x \cot x\, sen^2 x}{\sec^2\, x \csc x}\, dx = \int \frac{\left(\dfrac{sen\, x}{\cos x}\right)\cos x\left(\dfrac{\cos x}{sen\, x}\right) sen^2 x}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\, x}\right)\left(\dfrac{1}{sen\, x}\right)}\, dx$$

$$= \int \frac{sen\, x \cos x \cos x\, sen^2 x \cos^2\, x\, sen\, x}{\cos x\, sen\, x}\, dx$$

$$= \int sen^3 x \cos^3\, x\, dx$$

Esta integral corresponde a lo señalado en el inciso (d), subinciso (i), página 79, debe emplearse la fórmula trigonométrica (14) en la que, despejando, se llega a que

$$sen\, x \cos x = \frac{1}{2}\, sen\, 2x\,,$$

por lo que

$$sen^3 x \cos^3\, x = \left(\frac{1}{2}\, sen\, 2x\right)^3$$

por lo tanto,

$$\int sen^3 x \cos^3\, x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} sen\, 2x\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int sen^3 2x\, dx$$

Para ver los detalles de cómo se resuelve esta integral, ver el ejemplo 4 de la página 81:

$$= \frac{1}{8}\int sen\,2x\; sen^2\,2x\; dx$$

$$= \frac{1}{8}\int sen\,2x\left(1 - cos^2\,2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int sen\,2x\; dx - \frac{1}{8}\int sen\,2x\; cos^2\,2x\; dx$$

Para la primera integral debe hacerse el cambio de variable $u = 2x$, de donde $du = 2\,dx$. Para la segunda integral hacer $v = cos\,2x$, de donde $dv = -\,2\,sen\,2x\,dx$:

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int \underbrace{sen\,2x}_{sen\,u}\underbrace{\left(2\,dx\right)}_{du}\right] - \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\int \underbrace{cos^2\,2x}_{v^2}\underbrace{\left(-2\,sen\,2x dx\right)}_{dv}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\int sen\,u\; du + \frac{1}{16}\int v^2 dv$$

$$= -\frac{1}{16}cos\,2x + \frac{1}{16}\left(\frac{v^3}{3}\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{tan\,x\; cox\; cot\,x\; sen^2 x}{sec^2\,x\; csc\,x}\,dx = -\frac{1}{16}cos\,2x + \frac{1}{48}cos^3\,2x + c}$$

c) **Técnica de los binomios conjugados:** Cuando en el denominador aparece uno de los binomios conjugados que se mencionan en la siguiente tabla, se multiplica el numerador y el denominador por su conjugado para obtener en el denominador su equivalente de un término al cuadrado.

Esta técnica se basa en el hecho de que de las tres fórmulas trigonométricas llamadas Pitagóricas o de los cuadrados (ver fórmulas (1), (2) y (3) de la página 77), al despejar cualquiera de los dos términos que aparecen en el lado izquierdo del signo igual (=), se obtiene una diferencia de cuadrados, la cual se puede factorizar en dos binomios conjugados.

La siguiente tabla muestra lo afirmado en el párrafo anterior:

Fórmula Pitagórica:	2 despejes posibles: (diferencia de cuadrados)		Binomios conjugados	
$sen^2 A + cos^2 A = 1$	$sen^2 A = 1 - cos^2 A$	$=$	$(1 - cos\ A)(1 + cos\ A)$	(b1)
	$cos^2 A = 1 - sen^2 A$	$=$	$(1 - sen\ A)(1 + sen\ A)$	(b2)
$tan^2 A + 1 = sec^2 A$	$tan^2 A = sec^2 A - 1$	$=$	$(sec\ A - 1)(sec\ A + 1)$	(b3)
	$1 = sec^2 A - tan^2 A$	$=$	$(sec\ A - tan\ A)(sec\ A + tan\ A)$	(b4)
$cot^2 A + 1 = csc^2 A$	$cot^2 A = csc^2 A - 1$	$=$	$(csc\ A - 1)(csc\ A + 1)$	(b5)
	$1 = csc^2 A - cot^2 A$	$=$	$(csc\ A - cot\ A)(csc\ A + cot\ A)$	(b6)

La idea de esta técnica radica en que los numeradores sí se "pueden partir" en cada uno de sus términos entre todo el denominador; sin embargo, los denominadores no se "pueden partir". Entonces se trata de hacer que en el denominador aparezca un solo término y en el numerador dos o más para partir la fracción en su suma correspondiente.

Una vez multiplicado el numerador y el denominador por el conjugado del binomio del denominador, el producto del denominador dará la diferencia de cuadrados correspondiente a la tabla anterior, leída de derecha a izquierda, la cual equivale a una función trigonométrica al cuadrado. Se vuelve a aplicar la técnica (1) de los cuadrados o la técnica (2) de convertir todo a senos y/o cosenos.

Ejemplo 16: Integrar $\int \frac{tan\, 2x\, dx}{1 - cos\, 2x}$

Solución: El denominador tiene dos términos, pero así no se puede partir en la suma de dos la fracciones. Sin embargo, este denominador es uno de los binomios conjugados (b1) de la tabla anterior. Esto sugiere que debe multiplicarse numerador y denominador por su binomio conjugado, es decir, por $(1 + cos\, 2x)$. Haciéndolo resulta:

$$\int \frac{tan\, 2x\, dx}{1 - cos\, 2x} = \int \frac{tan\, 2x \left(1 + cos\, 2x\right) dx}{\left(1 - cos\, 2x\right)\left(1 + cos\, 2x\right)}$$

$$= \int \frac{\left(tan\, 2x + tan\, 2x\, cos\, 2x\right) dx}{1 - cos^2\, 2x}$$

$$= \int \frac{\left(tan\, 2x + tan\, 2x\, cos\, 2x\right) dx}{sen^2\, 2x}$$

En este momento el numerador ya tiene dos términos, por lo que ya se puede partir en la suma de dos fracciones:

$$= \int \frac{tan\, 2x\, dx}{sen^2\, 2x} + \int \frac{tan\, 2x\, cos\, 2x\, dx}{sen^2\, 2x}$$

Una vez partida la integral en la suma de dos, se aplica el criterio de pasar todo a senos y/o cosenos vista en la página 90:

$$= \int \frac{sen\ 2x\ dx}{cos\ 2x\ sen^2\ 2x} + \int \frac{sen\ 2x\ cos\ 2x\ dx}{cos\ 2x\ sen^2\ 2x}$$

$$= \int \frac{dx}{sen\ 2x\ cos\ 2x} + \int \frac{dx}{sen\ 2x}$$

Para la primera integral se cumple la condición del inciso (d), subinciso (i), de la página 79. La segunda integral es igual a la cosecante, ya que $\frac{1}{sen\ A} = csc\ A$, de manera que

$$= \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\ sen\ 4x} + \int csc\ 2x\ dx$$

$$= 2\int csc\ 4x\ dx + \int csc\ 2x\ dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}\int csc\ 4x\left(4\ dx\right)\right] + \frac{1}{2}\int csc\ 2x\left(2\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int csc\ u\ du + \frac{1}{2}\int csc\ v\ dv$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\left(csc\ u - cot\ u\right) + \frac{1}{2} ln\left(csc\ v - cot\ v\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{tan\ 2x\ dx}{1 - cos\ 2x} = \frac{1}{2}\ ln\left(csc\ 4x - cot\ 4x\right) + \frac{1}{2}\ ln\left(csc\ 2x - cot\ 2x\right) + c}$$

EJERCICIO 26 (Área 2)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int sen^4(7x-2)dx$

2) $\int cos^3 9x\, dx$

3) $\int cos^5(9-11x)\, dx$

4) $\int tan^3(7x+8)\, dx$

5) $\int cot^5 12x\, dx$

6) $\int sec^4 13x\, dx$

7) $\int sec^2(6x+17)\, dx$

8) $\int csc^4 9x\, dx$

9) $\int sen^3 5x\, cot\, 5x\, dx$

10) $\int tan^3 9x\, csc^2 9x\, dx$

11) $\int tan 8x\, sen\, 8x\, cot 8x\, dx$

12) $\int tan 3x\, cot 3x\, sec 3x\, csc 3x\, dx$

13) $\int \frac{dx}{1-sen\, 5x}$

14) $\int \frac{cos 9x\, dx}{sec 9x - tan 9x}$

15) $\int \frac{tan 4x\, dx}{csc\, 4x + cot\, 4x}$

16) $\int \frac{cos 10x\, dx}{sec 10x + tan 10x}$

17) $\int \frac{cos\, 8x}{1-cos\, 8x}\, dx$

18) $\int \frac{dx}{csc^2 6x - csc\, 6x}$

VIII

INTEGRACIÓN POR PARTES

Área 2

Supóngase que se tiene la función producto $y = uv$. Si se deriva con respecto de x se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} uv$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Multiplicando toda la igualdad por dx para eliminar denominadores:

$$dy = u\,dv \;+\; v\,du$$

Integrando en ambos miembros de la igualdad:

$$\int dy = \int u\,dv \;+\; \int v\,du$$

De estas tres integrales, solamente de la primera se puede definir su valor:

$$y = \int u\, dv + \int v\, du$$

y como al principio se dijo que $y = uv$, sustituyendo se obtiene que

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du$$

igualdad que vista en sentido contrario es lo mismo que

$$\int u\, dv + \int v\, du = uv$$

y, finalmente, despejando la primera integral se llega a:

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du} \qquad (27)$$

La fórmula (27) es la fórmula de la **integración por partes**. A la integral $\int u\, dv$ se le llama la *integral original* y a la integral $\int v\, du$ se le llama *la integral que resulta*. Para su buena utilización deben vigilarse las siguientes normas:

a) La integral original debe convertirse en $u\, dv$, para lo cual debe hacerse u una parte de la integral original y el resto hacerse dv. A lo anterior se le llama hacer la elección de variables. No existe regla alguna para establecer qué debe hacerse lo primero y qué lo segundo. La práctica es la que guía por el camino más acertado.

b) A partir de la elección de variables hecha en el inciso anterior, se calculan la diferencial du y la variable v. Derivando u se obtiene du; integrando dv se obtiene v.

c) Las diferenciales deben ir en la misma igualdad.

d) La *integral que resulta* debe ser más sencilla, o la mucho semejante, que la integral original; de lo contrario, debe comenzarse el proceso eligiendo nuevas variables. Algunos criterios para decidir que la integral que resulta es más sencilla o complicada que la original se irán estableciendo en ejemplos resueltos.

e) El proceso de integración por partes puede emplearse dos o más veces dentro del mismo proceso.

A pesar de que no existe una regla infalible, comprobada, universal, que lleve a hacer a la primera vez una elección de variables adecuada, sí hay algunos criterios que funcionan en muchas o en la mayoría de las ocasiones. Estos criterios son:

i) Para integrales de la forma

$$\int p(x)\, ln\, x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ sen\ x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ cos\ x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ tan\ x\, dx$$

en donde $p(x)$ es un polinomio, se recomienda hacer u a la función trascendente, mientras que $dv = p(x)$.

ii) Para integrales de la forma

$$\int p(x)\, e^{ax}\, dx$$

$$\int p(x)\, sen\, x\ dx$$

$$\int p(x)\, cos\, x\ dx$$

en donde $p(x)$ es un polinomio, se recomienda hacer $u = p(x)$, mientras que dv a la función trigonométrica o exponencial.

iii) Se sugiere a veces apoyarse en el acrónimo[1] o palabra clave L I A T E, iniciales de

L ogarítmicas
I nversas trigonométricas
A lgebraicas
T rigonométricas
E xponenciales

según este criterio, debe seleccionarse como u la primera función que figure en LIA-TE de izquierda a derecha y conforme al orden de esta palabra clave.

Conviene en este momento agregar al formulario de integrales la integral de e^u, ya que esta fórmula no puede encajarse en algún grupo especial. Dicha fórmula, que de aquí en adelante se requerirá, es

$$\int e^u du = e^u + c \qquad (28)$$

[1] Acrónimo es el vocablo que se forma por la unión de elementos o iniciales de dos o más palabras, como ovni (Objeto Volador No Identificado).

Ejemplo 1: Integrar $\int x\, sen\, x\, dx$

Solución: Esta integral por ninguno de los métodos estudiados hasta ahora puede resolverse. Conforme al inciso (a) de la página 99, para convertir la integral original en $u\,dv$ existen tres posibilidades para la elección de variables:

Primera posibilidad: Hacer $u = x$
$dv = sen\,x\,dx$

Segunda posibilidad: Hacer $u = sen\,x$
$dv = x\,dx$

Tercera posibilidad: Hacer $u = x\,sen\,x$
$dv = dx$

En este ejemplo se estudiarán las tres posibilidades.

Posibilidad 1:

Haciendo	se obtiene que	
$u = x$	$du = dx$	(derivando)
$dv = sen\,x\,dx$	$v = -\cos x$	(integrando)

Obsérvese que en $u\,dv$ (columna izquierda) está exactamente toda la integral original. De esta manera, si la integral original es igual la integral $\int u\,dv$ y ésta, por la fórmula (27), es igual a $uv - \int v\,du$, entonces la integral original es igual también a $uv - \int v\,du$.

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int x\,sen\,x\,dx = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$= x\left(-\cos x\right) - \int -\cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

La integral que resulta es a simple vista más sencilla que la original, puesto que ya es directa de fórmula, lo que significa que la elección de variables fue correcta:

$$\boxed{\int x\,sen\,x\,dx = -x\cos x + sen\,x + c}$$

Posibilidad 2:

Haciendo	se obtiene que	
$u = sen\,x$	$du = \cos x\,dx$	(derivando)
$dv = x\,dx$	$v = \dfrac{x^2}{2}$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int x\,sen\,x\,dx = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$= \frac{x^2}{2}\, sen\, x - \int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx$$

La integral que resulta $\int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx$ es más complicada que la original, ya que en ambas aparece la función trigonométrica $sen\, x$ o bien $\cos x$ y hasta allí todo es igual; sin embargo, mientras en la integral original aparece el polinomio x de primer grado multiplicando al factor $sen\, x$, en la integral que resulta está el polinomio x^2 de segundo grado multiplicando al factor $\cos x$, es decir, al aumentar de grado el polinomio aumenta el grado de dificultad. Por lo tanto, la elección de variables no es la adecuada.

Posibilidad 3:

Haciendo	se obtiene que	
$u = x\, sen\, x$	$du = (x \cos x + sen\, x)\, dx$	(derivando)
$dv = dx$	$v = x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int x\, sen\, x\, dx = \int u\, dv$$

$$= uv - \int v\, du$$

$$= x^2 sen\, x - \int \left(x^2 \cos x + x\, sen\, x \right) dx$$

$$= x^2 sen\, x - \int x^2 \cos x\, dx - \int x\, sen\, x\, dx$$

Las integrales que resultan son más complicadas que la original, ya que además de aparecer la integral de la posibilidad 2, se vuelve a repetir la original, es decir, no se avanzó nada. Por lo tanto, esta elección de variables tampoco es la adecuada.

En este ejemplo, al analizar todas las posibilidades de elecciones de variables, resultó que solamente la primera posibilidad fue la adecuada. Eso no significa que en todas las integrales por partes nada más una de todas las posibilidades sea la adecuada. Existen integrales que resolviéndose por esta técnica, pueden hacerse por dos o más formas diferentes. No hay regla para especificar cuál es la elección de variables adecuada en cada integral por partes, así como tampoco para decir cuáles integrales se hacen por partes y cuáles no. De hecho, algunas integrales que pueden realizarse por alguna otra técnica, también pueden hacerse por partes.

Ejemplo 2: Integrar $\int ln\, x\, dx$

Solución: Solamente existe una posibilidad para la elección de variables:

Haciendo	se obtiene que	
$u = ln\, x$	$du = \frac{1}{x}\, dx$	(derivando)
$dv = dx$	$v = x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int ln\, x\, dx = \int u\, dv$$

$$= uv - \int v\, du$$

$$= x\, ln\, x - \int x\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= x\, ln\, x - \int\ dx$$

La integral que resulta $\int\ dx$ es a simple vista mucho más sencilla que la original, ya que es inmediata de fórmula, por lo que la elección de variables (que de hecho, no había otra opción) ha sido la correcta.

Continuando el proceso se llega a que

$$\boxed{\int\ ln\, x\, dx = x\, ln\, x - x + c}$$

<u>COMPROBACIÓN</u>:

Igual que en otros ejemplos, para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = x\, ln\, x - x + c$. Entonces

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\, ln\, x - x + c \right)$$

$$= \left(x \frac{d}{dx}\, ln\, x + ln\, x \frac{d}{dx}\, x \right) - 1 + 0$$

$$= x\left(\frac{1}{x} \right) + ln\, x\ - 1$$ (ver nota al pie de página [2])

[2] Nótese que según las reglas de escritura debería escribirse $-1 + x\left(\frac{1}{x} \right) + ln\, x$; sin embargo, para no alterar el orden de los términos que se fueron derivando, lo que podría complicar la comprensión del proceso de derivación, se ha escrito en el orden en que se derivó.

$$= 1 + \ln x \;\; - 1$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \ln x}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int x^2 e^x dx$

Solución: En este caso:

Haciendo	se obtiene que	
$u = x^2$	$du = 2x\,dx$	(derivando)
$dv = e^x\,dx$	$v = e^x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int x^2 e^x dx = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$= x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

La integral que resulta es más sencilla que la original ya que el polinomio en x que multiplica al factor de la forma e^x, bajó de grado 2 a grado 1. Entonces debe volverse a integrar por partes, haciendo ahora:

Haciendo	se obtiene que	
$u = 2x$	$du = 2dx$	(derivando)
$dv = e^x\,dx$	$v = e^x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx\right]$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int sec^3\, x\, dx$

Solución: En la página 89, ejemplo 12, se dijo que las potencias nones de la secante y cosecante deben hacerse por partes. Esta integral no se puede hacer aplicando exclusivamente las técnicas para las integrales trigonométricas, sino en forma combinada con la integración por partes.

Aplicando primero la técnica de los cuadrados:

$$\int sec^3\, x\, dx = \int sec^2\, x\, sec\, x\, dx$$

$$= \int \left(tan^2\, x + 1\right) sec\, x\, dx$$

$$= \int tan^2 x \, sec\, x \, dx + \int sec\, x \, dx$$

La segunda integral ya es directa de fórmula. La primera integral es la que debe hacerse por partes. Hay varias formas de hacer la elección de variables (se deja al estudiante que busque otra diferente a la que se muestra aquí), una de ellas es la siguiente:

Haciendo	se obtiene que	
$u = tan\, x$	$du = sec^2 x\, dx$	(derivando)
$dv = tan\, x\, sec\, x\, dx$	$v = sec\, x$	(integrando)

Obsérvese que el producto $u\, dv$ es igual a $(tan\, x)(tan\, x\, sec\, x\, dx) = tan^2 x\, sec\, x\, dx$, que es la integral que se pretende hacer por partes.

entonces

$$\int sec^3 x \, dx = tan\, x\, sec\, x - \int sec^3 x \, dx + \int sec\, x \, dx$$

Obsérvese que volvió a salir la integral original, pero con signo negativo. En casos así, se juntan en el lado izquierdo, se suman (o restan) y se despeja. La última integral se resuelve directamente por fórmula:

$$\int sec^3 x \, dx + \int sec^3 x \, dx = tan\, x\, sec\, x + ln\left(tan\, x + sec\, x\right)$$

$$2\int sec^3 x \, dx = tan\, x\, sec\, x + ln\left(tan\, x + sec\, x\right) + c$$

$$\boxed{\int sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\left[tan\, x\, sec\, x + ln\left(tan\, x + sec\, x\right)\right] + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int e^{2x} sen\, 3x\, dx$

Solución: Este ejemplo tiene por objetivo mostrar en una sola vez varios recursos que pueden emplearse en la técnica de integración por partes. El primero es que se va a utilizar dos veces la integración por partes. El segundo es que cuando aparece nuevamente la integral original, se juntan y se despeja como en el ejemplo anterior.

Haciendo	se obtiene que	
$u = e^{2x}$	$du = 2e^{x}\, dx$	(derivando)
$dv = sen\, 3x\, dx$	$v = -\frac{1}{3} cos\, 3x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int e^{2x} sen\, 3x\, dx = -\frac{1}{3} e^{2x} cos\, 3x - \int -\frac{2}{3} e^{2x} cos\, 3x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2x} cos\, 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x} cos\, 3x\, dx$$

Esta integral que resulta se vuelve a hacer por partes:

Haciendo	se obtiene que	
$u = e^{2x}$	$du = 2e^{x}\,dx$	(derivando)
$dv = cos\ 3x\ dx$	$v = \dfrac{1}{3}\ s\,en\ 3x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 99:

$$\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{1}{3}\ e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{2x} sen\,3x - \int \frac{2}{3}e^{2x} sen\,3x\ dx\right]$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x - \frac{4}{9}\int e^{2x} sen\,3x\ dx$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\,dx + \frac{4}{9}\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x$$

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{9}\ e^{2x} sen\,3x$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\ dx = \frac{9}{13}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x\right] + c$$

$$\boxed{\int e^{2x} sen\,3x\ dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\ cos\,3x + \frac{2}{13}e^{2x} sen\,3x + c}$$

EJERCICIO 27 (Área 2)

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int arc\ sen\ x\ dx$

2) $\int ln(1-x)\ dx$

3) $\int x\ arc tan\ x\ dx$

4) $\int \dfrac{x\ arc tan\ x}{\left(x^2+1\right)^2}\ dx$

5) $\int \dfrac{arc\ sen\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

6) $\int x\ arc\ tan \sqrt{x^2-1}\ \ dx$

7) $\int \dfrac{arc\ sen\ x\ dx}{x^2}$

8) $\int x\ ln\, x\ dx$

9) $\int x^2\ ln\ x\ dx$

10) $\int x\ cos^2\ x\ dx$

11) $\int sen\ ln\ x\ dx$

12) $\int \sqrt{x}\ \ ln\ x\ dx$

IX

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Áreas 1, 2 y 3

La integración por fracciones parciales es más un truco o recurso algebraico que algo nuevo que vaya a introducirse en el curso de Cálculo Integral. Es decir, en realidad en este tema no va a aprenderse nada nuevo de Cálculo Integral, simplemente se va a echar mano del Álgebra y luego aplicar técnicas que ya se estudiaron en otros capítulos.

El tema de fracciones parciales en Álgebra se refiere a *desumar* [1] una fracción, es decir a deshacer una suma de fracciones; en otras palabras, se trata de encontrar la suma de qué fracciones da como resultado la fracción dada.

Por ejemplo, realizar la suma de fracciones

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}$$

[1] La palabra "***desumar***" no existe en el idioma Español. Aquí se ha compuesto esa palabra en base a las etimologías que rigen al idioma. El prefijo *des* que denota negación o inversión del significado y el verbo sumar. Es decir, se pretende dar a entender lo inverso a la realización de la suma, no como operación inversa (que eso es la resta), sino como inverso de algo que se hace y luego se deshace.

consiste en el procedimiento conocido de sacar común denominador:

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2(x)}{x(x+1)}$$

$$=\frac{3x+3+2x}{x(x+1)}$$

$$=\frac{5x+3}{x^2+x}$$

Cuando se ha introducido el término *desumar*, se ha pretendido hacer alusión al hecho de recorrer el proceso anterior ahora de atrás hacia adelante, es decir, a partir del resultado llegar a las dos fracciones originales. Equivale a preguntar: ¿La suma de qué fracciones dan como resultado $\frac{5x+3}{x^2+x}$?

La teoría de las fracciones parciales se divide en cuatro casos, atendiendo a los factores que aparezcan en el denominador original, los cuales se pueden clasificar en dos formas:

POR EL GRADO	**POR REPETICIÓN**
factores de 1er grado $\begin{cases} 1^{er} \text{ caso} \\ 2^{o} \text{ caso} \end{cases}$	factores no repetidos $\begin{cases} 1^{er} \text{ caso} \\ 3^{er} \text{ caso} \end{cases}$
factores de 2^{o} grado $\begin{cases} 3^{er} \text{ caso} \\ 4^{o} \text{ caso} \end{cases}$	factores repetidos $\begin{cases} 2^{o} \text{ caso} \\ 4^{o} \text{ caso} \end{cases}$

Lo anterior da por entendido que el denominador original debe estar factorizado para poderse clasificar en el caso que le corresponda, o lo que es lo mismo, los casos atienden a los factores que aparezcan en el denominador.

CASO 1: Se tienen en el denominador factores lineales no repetidos.

> ***Solución:*** ***A cada factor lineal de la forma* mx + n *que aparezca en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma*** $\dfrac{A}{mx+n}$ ***,***
>
> ***donde*** A ***es una constante a determinar.***

Ejemplo 1: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{5x+3}{x^2+x}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Lo primero que debe hacerse es factorizar el denominador:

$$\frac{5x+3}{x^2+x} = \frac{5x+3}{x\left(x+1\right)}$$

Una vez factorizado el denominador, se analizan uno a uno los factores del denominador que aparezcan para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, ambos factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto, ambos pertenecen al primer caso. Entonces al factor x del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre x; por su parte, al denominador $x + 1$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $x + 1$. Esto es

$$\frac{5x+3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \tag{9.1}$$

Una vez establecida la suma de fracciones que corresponden a la original, el procedimiento para determinar las constantes será el mismo para los casos 1, 2, 3 y 4. Consiste en

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{5x+3}{x(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x)}{x(x+1)}$$

$$\frac{5x+3}{x(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$5x+3=Ax+A+Bx$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^3 si las hubiere; se factorizan las x^2 si las hubiere, se factorizan las x si las hubiere y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$5x+3=x(A+B)+A$$

d) Se plantea un sistema de ecuaciones a partir del siguiente razonamiento: Para que lo escrito anteriormente sea realmente una igualdad, se requiere que el número de equis cúbicas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cúbicas que hay del lado derecho; que el número de equis cuadradas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cuadradas que hay del lado derecho; que el número de equis que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis que hay del lado derecho; y que el número sin equis que hay del lado izquierdo sea igual al número sin equis que hay del lado derecho.

En este ejemplo, si del lado izquierdo hay cinco equis, del lado derecho también deben haber cinco equis, para lo cual se requiere que el coeficiente de x del lado derecho sea igual a cinco, o sea que $A + B = 5$; por otra parte, si del lado izquierdo hay $+ 3$, del lado derecho también debe haberlo, lo cual se logra si $A = 3$. Esto lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ A \quad &= 3 \end{aligned}$$

de donde $B = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 2 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.1) se llega a que

$$\boxed{\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1}}$$

Ejemplo 2: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se analizan ambos factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, ambos factores son lineales (de 1er grado) y no están repetidos, por lo tanto, ambos pertenecen al primer caso. Entonces al factor $2x + 3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre $2x + 3$; por su parte, al denominador $3x - 1$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $3x - 1$.

Esto es

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{3x-1} \tag{9.2}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)}=\frac{A(3x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)}$$

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)}=\frac{3Ax-A+2Bx+3B}{(2x+3)(3x-1)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$2x-19=3Ax-A+2Bx+3B$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^3 si las hubiere; se factorizan las x^2 si las hubiere, se factorizan las x si las hubiere y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$2x-19=x(3A+2B)+(-A+3B)$$

d) Se plantea un sistema de ecuaciones a partir del siguiente razonamiento: Para que lo escrito anteriormente sea realmente una igualdad, se requiere que el número de equis cúbicas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cúbicas que hay del lado derecho; que el número de equis cuadradas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cuadradas que hay del lado derecho; que el número de equis que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis que hay del lado derecho; y que el número sin equis que hay del lado izquierdo sea igual al número sin equis que hay del lado derecho.

En este ejemplo, si del lado izquierdo hay dos equis, del lado derecho también deben haber dos equis, para lo cual se requiere que el coeficiente de x del lado derecho sea igual a dos, o sea que $3A + 2B = 2$; por otra parte, si del lado izquierdo hay -19, del lado derecho también debe haberlo, lo cual se logra si $-A + 3B = -19$. Esto lleva a las ecuaciones

$$3A + 2B = 2$$
$$-A + 3B = -19$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= -5 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.2) se llega a que

$$\boxed{\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{4}{2x+3} - \frac{5}{3x-1}}$$

Este sistema de ecuaciones simultáneas pudo resolverse por el método de suma y resta, o el de sustitución, o el de igualación, o por determinantes, inclusive con una calculadora. Si se tiene la calculadora **CASIO** *fx-95MS* debe hacerse lo siguiente:

a) Ordenar ambas ecuaciones de la forma $a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

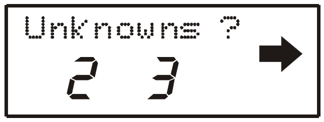
b) Borrar de las memorias de la calculadora todo registro anterior y ponerla en modo de cálculo, tecleando

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{CLR}}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$$

c) Poner la calculadora en modo de ecuación, tecleando:

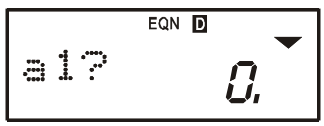
MODE MODE 1

Aparecerá entonces la pantalla



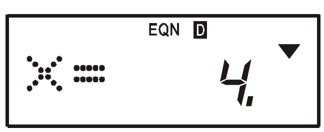
con lo que la calculadora pregunta: ¿Cuántas incógnitas, 2 ó 3? Teclear 2

d) Al aparecer la pantalla

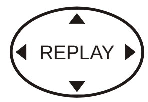


la calculadora está preguntando por el coeficiente a_1, que es el coeficiente de la variable x de la primera ecuación simultánea. En este caso, 3. Teclearlo y para que quede registrado en la memoria de la calculadora oprimir = .Repetir el procedimiento con todos los demás coeficientes. Para ingresar un valor negativo, debe hacerse con la tecla (-) , no con la de resta − .

Después de ingresar el valor del último coeficiente c_2 de la segunda ecuación y de registrarlo en la memoria de la calculadora a través de la tecla = , aparece en la pantalla el valor de x .



El triangulito que aparece del lado derecho de la pantalla significa que oprimiendo la tecla central que está debajo de la pantalla



en la dirección señalada, despliega el valor de y. Si se desea regresar a la pantalla nuevamente el valor de x, hay que teclear en la dirección que señala dicho triangulito.

Ejemplo 3: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se deben analizar los tres factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, los tres factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto pertenecen al primer caso. De tal manera que al factor $3x - 1$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre el mismo $3x - 1$; al denominador $x + 2$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $x + 2$; y por su parte, al factor $2x + 3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante C entre $2x + 3$. Esto es

$$\frac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}=\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{2x+3} \tag{9.3}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}=\frac{A(x+2)(2x+3)+B(3x-1)(2x+3)+C(3x-1)(x+2)}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

$$=\frac{A\left(2x^2+7x+6\right)+B\left(6x^2+7x-3\right)+C\left(3x^2+5x-2\right)}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

$$= \frac{2Ax^2 + 7Ax + 6A + 6Bx^2 + 7Bx - 3B + 3Cx^2 + 5Cx - 2C}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$8x^2 + 36x + 47 = 2Ax^2 + 7Ax + 6A + 6Bx^2 + 7Bx - 3B + 3Cx^2 + 5Cx - 2C$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^2, se factorizan las x y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$8x^2 + 36x + 47 = x^2(2A + 6B + 3C) + x(7A + 7B + 5C) + (6A - 3B - 2C)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay ocho equis cuadradas, del lado derecho también las haya, lo que implica que $2A + 6B + 3C$ tenga que ser igual a 8. Igualmente, si del lado izquierdo hay 36 equis, del lado derecho también debe haberlas, lo que implica que $7A + 7B + +5C$ tenga que ser igual a 36; finalmente, si del lado izquierdo hay $+ 47$, del derecho también debe haberlos, lo que implica que $6A - 3B - 2C$ deba ser igual a $+ 47$.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2A + 6B + 3C &= 8 \\ 7A + 7B + 5C &= 36 \\ 6A - 3B - 2C &= 47 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= 7 \\ B &= 1 \\ C &= -4 \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.3) se llega a que

$$\boxed{\frac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}=\frac{7}{3x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{4}{2x+3}}$$

Ejemplo 4: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x-6}{(x+3)(2x-5)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se deben analizar los dos factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, los dos factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto pertenecen al primer caso. De tal manera que al factor $x+3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre el mismo $x+3$; al denominador $2x$ - 5 le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $2x-5$. Esto es

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{2x-5} \tag{9.4}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)}=\frac{A(2x-5)+B(x+3)}{(x+3)(2x-5)}$$

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)}=\frac{2Ax-5A+Bx+3B}{(x+3)(2x-5)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$x - 6 = 2Ax - 5A + Bx + 3B$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x:

$$x - 6 = x(2A + B) + (-5A + 3B)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay una equis, del lado derecho también haya solamente una, lo que implica que $2A + B$ tenga que ser igual a 1. Igualmente, si del lado izquierdo hay -6, del lado derecho también debe haberlo, lo que implica que $-5A + 3B$ tenga que ser igual a -6.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2A + B &= 1 \\ -5A + 3B &= -6 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{9}{11} \\ B &= -\frac{7}{11} \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.4) se llega a que

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{9}{11}}{x+3} + \frac{-\frac{7}{11}}{2x-5}$$

$$\boxed{\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)}=\frac{9}{11(x+3)}-\frac{7}{11(2x-5)}}$$

EJERCICIO 28 (Áreas 1, 2 y 3)

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{32x-20}{(x-1)(5x-3)}$

2) $\dfrac{31x-33}{2x^2-6x}$

3) $\dfrac{11x+8}{10x^2+5x}$

4) $\dfrac{18-27x}{4x^2+3x-1}$

5) $\dfrac{6x+2}{7x^2-2x}$

6) $\dfrac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}$

7) $\dfrac{-4x^2+5x+33}{(x+1)(x-2)(x-3)}$

8) $\dfrac{9x^2-4x+5}{(3x+1)(3x-1)(2x-3)}$

9) $\dfrac{20x^2-60x+46}{(x+1)(2x-5)(x-1)}$

10) $\dfrac{-40x^2-11x+92}{(4x+1)(5x-1)(x-10)}$

<u>CASO 2:</u> Se tienen en el denominador factores lineales repetidos k veces.

Solución: ***A cada factor lineal de la forma* mx + n *que aparezca repetido k veces en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma***

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\frac{A_3}{(mx+n)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}\ ,$$

donde A_k es una constante a determinar.

Ejemplo 5: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

Solución: La fracción original es equivalente a $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-1)}$, es decir que en el denominador está repetido dos veces el factor (x - 1). Por lo tanto, le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} \qquad (9.5)$$

El procedimiento para calcular las constantes A y B es exactamente el mismo que el empleado en los ejemplos 1 a 4 del caso I:

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. Igualando entonces los numeradores:

$$2x + 1 = Ax - A + B$$

c) Factorizando en el lado derecho las diferentes potencias de x:

$$2x + 1 = x(A) + (-A + B)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay dos equis, del lado derecho también haya dos, lo que implica que A tenga que ser igual a 2. Igualmente, si del lado izquierdo hay + 1, del lado derecho también debe haberlo, lo que implica que $-A + B$ tenga que ser igual a + 1.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ -A + B &= 1 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 3 \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.5) se llega a que

$$\boxed{\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}}$$

Ejemplo 6: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2}$

Solución: La fracción original es equivalente a $\dfrac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)(x-3)}$. Analizando factor por factor, se ve que el primero de ellos $(6x + 5)$ es un factor lineal no repetido y por lo tanto pertenece al primer caso; mientras que el factor $(x - 3)$ es lineal y está repetido dos veces, por lo que pertenece al segundo caso. Combinando ambos casos, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{A}{6x+5} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \tag{9.6}$$

El procedimiento para calcular las constantes A, B y C es exactamente el mismo que el empleado en los ejemplos 1 a 4 del caso I:

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B(6x+5)(x-3) + C(6x+5)}{(6x+5)(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x^2 - 6x + 9) + B(6x^2 - 13x - 15) + C(6x+5)}{(6x+5)(x-3)^2}$$

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{Ax^2 - 6Ax + 9A + 6Bx^2 - 13Bx - 15B + 6Cx + 5C}{(6x+5)(x-3)^2}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$5x^2 - 42x + 35 = Ax^2 - 6Ax + 9A + 6Bx^2 - 13Bx - 15B + 6Cx + 5C$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x :

$$5x^2 - 42x + 35 = x^2(A + B) + x(-6A - 13B + 6C) + (9A - 15B + 5C)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay cinco equis cuadradas, del lado derecho también las haya, lo que implica que la suma de $A + B$ tenga que ser igual a 5. Igualmente, si del lado izquierdo hay -42 equis, del lado derecho también debe haberlas, lo que implica que $-6A + 13B + 6C$ deba ser igual a -42. Finalmente, si del lado izquierdo hay un $+35$, del derecho también debe haberlo, lo que conduce a que $9A - 15B + 5C$ tenga que ser igual a $+35$.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A + 6B \quad &= 5 \\ -6A - 13B + 6C &= -42 \\ 9A - 15B + 5C &= 35 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= 5 \\ B &= 0 \\ C &= -2 \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.6) se llega a que

$$\frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2}=\frac{5}{6x+5}+\frac{0}{x-3}+\frac{-2}{(x-3)^2}$$

$$\boxed{\frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2}=\frac{5}{6x+5}-\frac{2}{(x-3)^2}}$$

EJERCICIO 29 (Áreas 1, 2 y 3)

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{14x+9}{(2x+1)^2}$

2) $\dfrac{5}{(3x-2)^2}$

3) $\dfrac{x}{(5x-4)^2}$

4) $\dfrac{2x^2-7x+3}{(x+1)(x-1)^2}$

5) $\dfrac{5x-5}{(5x+3)^2}$

6) $\dfrac{x^2+3}{(2x-3)(x+8)^2}$

7) $\dfrac{x^2}{(5x+7)^3}$

8) $\dfrac{x^2+7x}{(x+9)^3}$

9) $\dfrac{4x^2+x-9}{(3x-2)(2x+3)^2}$

10) $\dfrac{2x^2+2x+3}{(5x-7)^2(2x-9)}$

<u>CASO 3:</u> Se tienen en el denominador factores cuadráticos irreductibles no repetidos.

> ***Solución:*** ***A cada factor cuadrático irreductible de la forma*** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ ***que aparezca en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma***
>
> $$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$
>
> ***donde*** $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ ***son constantes a determinar.***

En este caso y en el siguiente debe tenerse mucho cuidado de que los factores cuadráticos o de 2º grado que aparezcan en el denominador sean irreductibles, o sea que no puedan factorizarse en dos lineales. En el caso de que sean reductibles (factorizables) y no se factoricen, el resultado obtenido de fracciones parciales resulta incompleto. Analizar el ejemplo 8.

Para saber si un factor cuadrático es reductible o no debe analizarse con la fórmula general de las ecuaciones de 2º grado: si la raíz cuadrada de dicha fórmula resulta negativa significa que es irreductible. Con la calculadora se obtienen soluciones complejas o imaginarias.

El procedimiento para calcular las constantes es exactamente el mismo que se explicó en los cuatro ejemplos correspondientes al caso I, por lo que ya en los ejemplos siguientes se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Ejemplo 7: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$

Solución: Lo primero que debe hacerse es asegurarse de que el factor cuadrático que aparece en el denominador $x^2 + x + 4$ es irreductible. Para ello se toma como si fuera una ecuación y se le aplica la fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado.

Haciéndolo, con $a = 1$; $b = 1$; $c = 4$:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

Como la raíz cuadrada resulta negativa, significa que el factor $x^2 + x + 4$ ya no se puede factorizar. Entonces analizando los dos factores que aparecen en la fracción original se observa que el primero es lineal no repetido y pertenece al caso I, mientras que el segundo es cuadrático no repetido y pertenece al tercer caso. Combinando ambos casos, les corresponde la suma de fracciones:

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 4} \tag{9.7}$$

$$= \frac{A(x^2 + x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$$

Igualando los numeradores:

$$3x^2 + 2x - 2 = Ax^2 + Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$$

$$3x^2 + 2x - 2 = x^2(A + B) + x(A + 2B + C) + (4A + 2C)$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B \quad\quad &= 3 \\ A + 2B + C &= 2 \\ 4A \quad\quad + 2C &= -2 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2 \\ C &= -3 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.7) se llega a que

$$\boxed{\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x-3}{x^2 + x + 4}}$$

Ejemplo 8: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)}$

Solución: El factor cuadrático $x^2 - 3x + 2$ es reductible, o sea que puede factorizarse. Efectivamente, buscando dos números que sumados den -3 y multiplicados den $+2$ se llega a que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

De modo que la fracción original debe escribirse como $\dfrac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

Analizando los factores del denominador se ve que los tres pertenecen al primer caso, por lo que le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \tag{9.8}$$

Haciendo la suma de fracciones:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A(x^2-3x+2)+B(x^2-x-2)+C(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-Bx-2B+Cx-C}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

Igualando los numeradores:

$$6x^2-5x-5=Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-Bx-2B+Cx^2-C$$
$$6x^2-5x-5=x^2(A+B+C)+x(-3A-B)+(2A-2B-C)$$

Igualando coeficientes de las diferentes potencias de x se llega a que:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 6 \\ -3A-B &= -5 \\ 2A-2B-C &= -5 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2 \\ C &= 3 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.8) se llega a que

$$\boxed{\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}} \qquad (\text{I})$$

Esta es la descomposición en fracciones parciales correcta , sin embargo, si por descuido se intenta descomponerla con los dos factores que aparecen originalmente, es decir a partir de

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

tomando el primer factor como lineal no repetido (caso I) y el segundo factor como cuadrático no repetido (caso III), se llega a lo siguiente:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+2} \qquad (9.8\text{a})$$

$$=\frac{A\left(x^2-3x+2\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

$$=\frac{Ax^2-3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

Igualando numeradores:

$$6x^2-5x-5=Ax^2-3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx+C$$
$$6x^2-5x-5=x^2(A+B)+x(-3A+B+C)+(2A+C)$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B \qquad &= 6 \\ -3A + B + C &= -5 \\ 2A \qquad + C &= -5 \end{aligned}$$

de donde
$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 5 \\ C &= -7 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.8a) se llega a que

$$\boxed{\frac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}} \qquad (\text{II})$$

Conviene comparar lo obtenido en (I) de la página anterior con (II). Ambas expresiones son ciertas, con la diferencia de que mientras (I) está completa, (II) está incompleta porque ésta aún puede dividirse en la suma de otras dos fracciones. El estudiante puede comprobar que la suma de las dos últimas fracciones de (I) dan por resultado a la segunda fracción de (II), o sea que

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{5x-7}{x^2 - 3x + 2}$$

Esto se debe a que el factor cuadrático $x^2 - 3x + 2$ del denominador de la fracción original es reductible y no se factorizó para aplicarle el procedimiento de fracciones parciales.

CASO 4: Se tienen en el denominador factores cuadráticos irreductibles repetidos k veces.

> ***Solución:*** ***A cada factor cuadrático irreductible de la forma*** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ ***que aparezca en el denominador repetido*** k ***veces le corresponde una suma de fracciones de la forma***
>
> $$\frac{A_1x + A_2}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_3x + A_4}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{(ax^2 + bx + c)^k}$$
>
> ***donde*** A_k ***son constantes a determinar.***

El procedimiento para calcular las constantes es exactamente el mismo que se explicó en los cuatro ejemplos correspondientes al caso I, por lo que ya en los ejemplos siguientes se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Ejemplo 9: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2}$

Solución: Como el denominador significa $(x^2 + 2)(x^2 + 2)$ se trata de un factor cuadrático repetido dos veces. Conforme a la regla del caso IV, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} \qquad (9.9)$$

$$= \frac{\left(Ax + B\right)\left(x^2 + 2\right) + Cx + D}{\left(x + 2\right)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D}{\left(x^2 + 2\right)^2}$$

Igualando los numeradores:

$$x^3 + 2x + 5 = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$x^3 + 2x + 5 = x^3\left(A\right) + x^2\left(B\right) + x\left(2A + C\right) + D$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{llllr} A & & & & = 1 \\ & B & & & = 0 \\ 2A & & + C & & = 2 \\ & & & D & = 5 \end{array}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= 0 \\ D &= 5 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (9.9) se llega a que

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{\left(x^2 + 2\right)^2} = \frac{x + 0}{x^2 + 2} + \frac{0x + 5}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\boxed{\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5}{(x^2 + 2)^2}}$$

EJERCICIO 30 (Área 2)

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{x^2}{x^3 - x}$

2) $\dfrac{4x + 3}{\left(x - 1\right)^2}$

3) $\dfrac{x^2 + 7}{\left(x - 3\right)\left(x^2 + x + 5\right)}$

4) $\dfrac{x^3 + 5x}{\left(2x - 1\right)^2\left(x^2 + 3\right)}$

5) $\dfrac{5x^2 - 9}{3x^3 - 2x^2}$

6) $\dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\left(x^2 + 4\right)^3}$

7) $\dfrac{5x^3 + 5x}{\left(x^2 - x + 7\right)^2}$

8) $\dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^4 + 3x^3 + 8x^2}$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Para integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, si el grado de $P(x)$ es igual o mayor que el de $Q(x)$ debe hacerse primero la división y luego aplicar la teoría de fracciones parciales, para integrar cada fracción parcial. Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ debe aplicarse la teoría de fracciones parciales, para integrar cada fracción parcial.

Ejemplo 10: Integrar $\int \frac{\left(7x^2-7x-24\right)dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$

Solución: Aplicando la teoría de las fracciones parciales al integrando:

$$\frac{7x^2-7x-24}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A(x+3)(x-1)+B(2x+1)(x-1)+C(2x+1)(x+3)}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax-3A+2Bx^2-Bx-B+2Cx^2+7Cx+3C}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$$

Igualando numeradores:

$$7x^2-7x-24 = Ax^2+2Ax-3A+2Bx^2-Bx-B+2Cx^2+7Cx+3C$$
$$7x^2-7x-24 = x^2\left(A+2B+2C\right)+x\left(2A-B+7C\right)+\left(-3A-B+3C\right)$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + 2B + 2C &= 7 \\ 2A - \ \ B + 7C &= -7 \\ -3A - \ \ B + 3C &= -24 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son: $A = 5$
$B = 3$
$C = -2$

sustituyendo:

$$\frac{7x^2 - 7x - 24}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{5}{2x+1} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-1}$$

y por lo tanto

$$\int \frac{(7x^2 - 7x - 24)\,dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \int \frac{5\,dx}{2x+1} + \int \frac{3\,dx}{x+3} - \int \frac{2\,dx}{x-1}$$

recordar que debe hacerse un cambio de variable, haciendo u al primer denominador, v al segundo denominador y w al tercer denominador, de lo que se obtiene que

$$= \frac{5}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{dv}{v} - 2\int \frac{dw}{w}$$

$$\boxed{\int \frac{(7x^2 - 7x - 24)\,dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{5}{2}\,ln(2x+1) + 3\,ln(x+3) - 2\,ln(x-1) + c}$$

Un buen ejercicio algebraico consistiría en que el estudiante verifique que el resultado anterior es lo mismo que

$$ln\left(\frac{c\left(x+3\right)^3\sqrt{\left(2x+1\right)^5}}{\left(x-1\right)^2}\right)$$

Ejemplo 11: Integrar $\displaystyle\int \frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}\,dx$

Solución: Como el grado del numerador (2) es menor que el grado del denominador (4, porque $\left(4x^2\right)^2=16x^4$), debe emplearse la teoría de las fracciones parciales.

$$\frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}=\frac{Ax+B}{4x^2+9}+\frac{Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{\left(Ax+B\right)\left(4x^2+9\right)+Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{4Ax^3+4Bx^2+9Ax+9B+Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

lo que implica que los numeradores deben ser iguales:

$$\begin{aligned}8x^2+5x+18&=4Ax^3+4Bx^2+9Ax+9B+Cx+D\\&=x^3\left(4A\right)+x^2\left(4B\right)+x\left(9A+C\right)+\left(9B+D\right)\end{aligned}$$

De donde, igualando coeficientes de las mismas potencias de x se llega al siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{array}{lllllll} 4A & & & & = & 0 \\ & 4B & & & = & 8 \\ 9A & & +\ C & & = & 5 \\ & 9B & & +\ D & = & 18 \end{array}$$

de donde:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{8x^2 + 5x + 18}{\left(4x^2 + 9\right)^2} = \frac{2}{4x^2 + 9} + \frac{5x}{\left(4x^2 + 9\right)^2}$$

Y por lo tanto

$$\int \frac{\left(8x^2 + 5x + 18\right)\, dx}{\left(4x^2 + 9\right)^2} = \int \frac{2\, dx}{4x^2 + 9} + \int \frac{5x\, dx}{\left(4x^2 + 9\right)^2}$$

$$= \int \frac{2\, dx}{4x^2 + 9} + 5\int x\left(4x^2 + 9\right)^{-2} dx$$

para la 1ª integral, hacer:	para la 2ª integral, hacer:
$u = 2x$	$v = 4x^2 + 9$
$du = 2\, dx$	$dv = 8x\, dx$
$a^2 = 9$	
$a = 3$	

$$= \int \frac{2dx}{4x^2 + 9} + \frac{5}{8}\int \left(4x^2 + 9\right)^{-2} 8xdx$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2} + \frac{5}{8}\int v^{-2}dv$$

$$= \frac{1}{a} arc\ tan \frac{u}{a} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^{-2+1}}{-2+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^{-1}}{-1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} + \frac{5}{-8v} + c$$

$$\boxed{\int \frac{8x^2 + 5x + 18}{\left(4x^2 + 9\right)^2} dx = \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} - \frac{5}{8\left(4x^2 + 9\right)} + c}$$

Ejemplo 12: Integrar $\displaystyle\int \frac{6x^3 + 9x^2 - 8x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\, dx$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, debe efectuarse primero la división:

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ 2x^2 + 3x - 2 & 6x^3 + 9x^2 - 8x - 9 \\ & \underline{-6x^3 - 9x^2 + 6x} \\ & - 2x - 9 \end{array}$$

Significa que

$$\int \frac{6x^3 + 9x^2 - 8x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\ dx = \int \left(3x + \frac{-2x - 9}{2x^2 + 3x - 2} \right) dx$$

$$= \int 3x\, dx + \int \frac{-2x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\ dx$$

Para realizar la segunda integral debe aplicarse la teoría vista en el capítulo VI, página 59. Sea entonces

$$u = 2x^2 + 3x - 2$$

de donde: $du = (4x + 3)\, dx$

Multiplicando por (-2) y $\left(-\frac{1}{2} \right)$ simultáneamente:

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \int \frac{(4x + 18)\ dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

Luego sumando (+ 3) para obtener la diferencial du, y restándolo para que no se altere la integral:

$$= \int 3x\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{(4x + 3 - 3 + 18)\, dx}{2x^2 + 3x - 3}$$

Y partiendo en dos esta última integral:

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \left[\int \frac{(4x + 3)\, dx}{2x^2 + 3x - 2} + \int \frac{(-3 + 18)}{2x^2 + 3x - 2}\ dx \right]$$

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \left[\int \frac{(4x + 3)\, dx}{2x^2 + 3x - 2} + \int \frac{15\ dx}{2x^2 + 3x - 2} \right]$$

Recordando que el denominador de la segunda integral se hizo u y por lo tanto el numerador es du, se obtiene que

$$= \int 3x\,dx - \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{u} + 15\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}\right]$$

$$= \int 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

resolviendo las dos primeras integrales y dejando de momento pendiente la tercera:

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\, u - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

Para resolver esta tercera integral, aún pendiente, debe aplicarse la teoría vista en el capítulo V, página 36. De manera que como

$$2x^2 + 3x - 2 = \left(\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

se llega a que

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\, x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{8}}$$

Haciendo $u = \sqrt{2}\, x + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

de donde $du = \sqrt{2}\; dx$

y además $a^2 = \dfrac{25}{8}$

$$a = \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

entonces

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int \frac{\overbrace{\sqrt{2}\,dx}^{du}}{\underbrace{\left(\sqrt{2}\,x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{u^2} - \underbrace{\frac{25}{8}}_{a^2}}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right] + c$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)} ln \frac{\sqrt{2}\,x + \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}\right] + c$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{\cancel{2\sqrt{2}}}\left[\frac{\cancel{2\sqrt{2}}}{10} ln \frac{\sqrt{2}\,x - \frac{2}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x + \frac{8}{2\sqrt{2}}}\right] + c$$

Para eliminar los denominadores "pequeños" del numerador y del denominador del argumento del logaritmo natural, basta multiplicar numerador y denominador por $2\sqrt{2}$ para llegar finalmente a que

$$\boxed{\int \frac{6x^3+9x^2-8x-9}{2x^2+3x-2}\,dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\left(2x^2+3x-2\right) - \frac{3}{2}\,ln\left(\frac{4x-2}{4x+8}\right) + c}$$

EJERCICIO 31 (Áreas 1, 2 y 3)

Integrar:

1) $\displaystyle\int \frac{(-4x-23)}{(2x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{(61x-1)}{(3x-2)(x+5)(2x+1)}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\left(6x^2-4x+31\right)}{(2x-3)(x+4)(3x-1)}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{(3x+1)}{(3x-1)^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{\left(-16x^2+54x-40\right)}{(2x-3)^3}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\left(-8x^2+35x+9\right)}{(2x-1)(x-4)^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{\left(2x^2+5x+1\right)}{(x+1)^2}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\left(3x^2-16x+20\right)}{(x-3)^2}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{(-2x+5)}{(x-1)\left(x^2+2\right)}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{\left(5x^2+x+2\right)}{(x+1)\left(x^2+1\right)}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{\left(3x^2-10x+16\right)}{(x-3)\left(x^2+x+1\right)}\,dx$

X

DIVERSOS CAMBIOS DE VARIABLE TRIGONOMÉTRICOS

Área 2

Para integrales de la forma $\int p(x)^{\pm 1}\left(\pm a^2x^2 \pm b^2\right)^{\pm\frac{1}{2}} dx$, en donde $p(x)$ es un polinomio en el numerador o en el denominador (según tome el exponente el valor de $+1$ o de - 1), mientras que el binomio $(\pm a^2x^2 \pm b^2)$ es una raíz cuadrada que puede ir también en el numerador o en el denominador, se debe hacer el cambio de variable siguiente:

para el radical	hacer el cambio	
$\sqrt{a^2x^2 + b^2}$	$x = \dfrac{b}{a} tan\ t$	(1)
$\sqrt{a^2x^2 - b^2}$	$x = \dfrac{b}{a} sec\ t$	(2)
$\sqrt{b^2 - a^2x^2}$	$x = \dfrac{b}{a} sen\ t$	(3)

Esta técnica de integración consta de tres grandes pasos:

PASO 1: Hacer el cambio de variable que le corresponda conforme al radical que aparezca y efectuar las operaciones algebraicas necesarias para que desaparezca el radical, con lo cual la integral original se transforma en una integral trigonométrica.

PASO 2: Realizar la integral trigonométrica que resultó en el paso anterior.

PASO 3: Regresar a la variable original, para lo cual:

a) Se despeja la función trigonométrica del cambio de variable hecho inicialmente;
b) se construye un triángulo rectángulo congruente con la función trigonométrica anterior y se calcula el tercer lado por el teorema de Pitágoras, el cual siempre va a ser la raíz cuadrada original. De allí se deducen los valores de las demás funciones trigonométricas que hayan aparecido en la integración (en el paso 2);
c) se sustituyen los equivalentes de dichas funciones trigonométricas en el resultado de la integración del paso 2.

Ejemplo 1: Integrar $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x}\, dx$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x (en el denominador) y el radical de la forma $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$ aparece en el numerador, en donde

$$a^2 = 4$$
$$b^2 = 9$$
$$a = 2$$
$$b = 3$$

le corresponde, conforme a la tabla de la página 149, el cambio de variable (2), es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $$x = \frac{3}{2}\sec t$$

de donde

$$dx = \frac{3}{2}\tan t \sec t \, dt$$

y además

$$x^2 = \frac{9}{4}\sec^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}\;dx}{x} = \int \frac{\sqrt{4\left(\frac{9}{4}\sec^2 t\right) - 9}\;\left(\cancel{\frac{3}{2}}\tan t \cancel{\sec t}\, dt\right)}{\cancel{\frac{3}{2}}\cancel{\sec t}}$$

$$= \int \sqrt{9\sec^2 t - 9}\;\tan t\, dt$$

$$= \int \sqrt{9\left(\sec^2 t - 1\right)}\;\tan t\, dt$$

y como $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$:

$$= \int \sqrt{9\tan^2 t}\;\tan t\; dt$$

$$= \int \left(3\tan t\right)\tan t\, dt$$

$$= 3\int \tan^2 t\, dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso 1.

PASO 2:

$$\begin{aligned} 3\int tan^2 t\, dt &= 3\int \left(sec^2 t - 1\right) dt \\ &= 3\int sec^2 t\, dt - 3\int dt \\ &= 3tan\, t - 3t + c \end{aligned}$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \frac{3}{2} sec\, t$. Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$sec\, t = \frac{2x}{3}$$

b) Para construir un triángulo rectángulo congruente con esa función trigonométrica debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene la *secante* de t, implica que t es el ángulo. Además, como la función *secante* es la hipotenusa entre el cateto adyacente, se deduce que $2x$ es la hipotenusa y que 3 es el cateto adyacente. Ver el triángulo rectángulo de la figura 1.

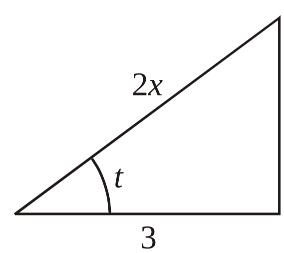


figura 1

El tercer lado, en este caso el cateto opuesto a t, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, el cual es siempre la raíz cuadrada original, $\sqrt{4x^2 - 9}$, como lo muestra la figura 2.

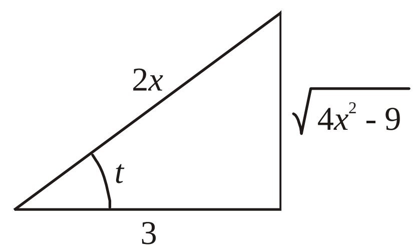


figura 2

Recordando que el resultado de la integración fue $3\tan t - 3t + c$, del triángulo de la figura 2 debe deducirse el valor de la *tangente* de t (cateto opuesto entre cateto adyacente), o sea

$$\tan t = \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}$$

y de aquí mismo se obtiene que

$$t = \arctan \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}$$

aunque también del cambio de variable original,

$$t = \operatorname{arc\,sec} \frac{2x}{3}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$3\tan t - 3t + c = 3\left(\frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}\right) - 3\left(\operatorname{arc\,sec} \frac{2x}{3}\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx = \sqrt{4x^2-9} - 3\,arc\ sec\frac{2x}{3} + c}$$

COMPROBACIÓN:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-9}} - 3\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{4x^2}{9}-1}}\right)$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{3}{x\sqrt{\frac{4x^2-9}{9}}}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{3}{x\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right)}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{9}{x\sqrt{4x^2-9}}$$

$$= \frac{4x^2-9}{x\sqrt{4x^2-9}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x^2 (en el numerador) y el radical de la forma $\sqrt{b^2 - a^2x^2}$ aparece en el denominador, en donde

$$a^2 = 4$$
$$b^2 = 25$$
$$a = 2$$
$$b = 5$$

le corresponde, conforme a la tabla de la página 149, el cambio de variable (3) , es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $$x = \frac{5}{2}\,sen\,t$$

de donde

$$dx = \frac{5}{2}\cos t\;dt$$

y además

$$x^2 = \frac{25}{4}\,sen^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{\frac{25}{4}\,sen^2 t\left(\frac{5}{2}\cos t\;dt\right)}{\sqrt{25-4\left(\frac{25}{4}\,sen^2 t\right)}}$$

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25 - 25 sen^2 t}}$$

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25\left(1 - sen^2 t\right)}}$$

y como $1 - sen^2 t = cos^2\ t$:

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25\, cos^2\ t}}$$

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ \cancel{cos\, t}\ dt}{5\,\cancel{cos\, t}}$$

$$= \frac{25}{8}\int\ sen^2 t\ dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso anterior.

PASO 2:

$$\frac{25}{8}\int\ sen^2 t\ dt = \frac{25}{8}\int\ \frac{1}{2}\left(1 - cos\, 2t\right) dt$$

$$= \frac{25}{8}\int\ \frac{1}{2} dt - \frac{25}{8}\int\ \frac{1}{2}\ cos\, 2t\ dt$$

$u = 2t$

$du = 2\ dt$

$$= \frac{25}{16}\int dt - \frac{25}{16}\left[\frac{1}{2}\int cos\ 2t\left(2dt\right)\right]$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}\int cos\, u\ du$$

$$= \frac{25}{16}\ t - \frac{25}{32}\ sen\, u + c$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}\ sen\, 2t + c$$

Hasta aquí está realizada la integral trigonométrica; sin embargo, como el regreso a la variable original requiere la construcción de un triángulo rectángulo en el que el ángulo sea la variable *t*, debe convertirse la función de ángulo doble ($sen\ 2t$) a una de ángulo simple a través de igualdades trigonométricas. Para este caso, como $sen\, 2t = 2\, sen\, t\, cos\, t$, entonces el resultado final de la integración trigonométrica debe escribirse como

$$= \frac{25}{16}t\ -\ \frac{25}{32}\left(2\, sen\, t\, cos\, t\right)$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{16}\ sen\ t\ cos\, t$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \frac{5}{2}sen\, t$ Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$sen\ t = \frac{2x}{5}$$

b) Para construir un triángulo rectángulo congruente con esa función trigonométrica debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene el *seno* de t, implica que t es el ángulo. Además, como la función *seno* es el cateto opuesto entre la hipotenusa, se deduce que $2x$ es el cateto opuesto y que 5 es la hipotenusa. Ver el triángulo rectángulo de la figura 3.

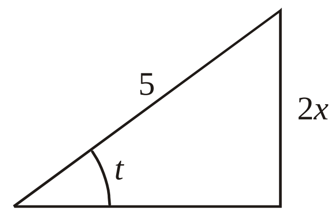


figura 3

El tercer lado, en este caso el cateto adyacente a t, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, el cual es siempre la raíz cuadrada original, $\sqrt{25 - 4x^2}$ como lo muestra la figura 4.

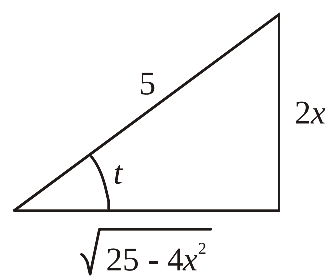


figura 4

Recordando que el resultado de la integración fue

$$\frac{25}{16}t - \frac{25}{16} sen\ t\ cos\ t$$

del triángulo de la figura 4 debe deducirse el valor del *coseno* de t (cateto adyacente entre hipotenusa), o sea

$$cos\ t = \frac{\sqrt{25 - 4x^2}}{5}$$

y de aquí mismo se obtiene que

$$t = arc\cos \frac{\sqrt{25 - 4x^2}}{5}$$

aunque también del cambio de variable original,

$$t = arc\ sen\ \frac{2x}{5}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$\frac{25}{16}t - \frac{25}{16}sen\ t\cos t = \frac{25}{16}\left(arc\ sen\frac{2x}{5}\right) - \frac{25}{16}\left(\frac{2x}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{25-4x^2}}{5}\right) + c$$

$$= \frac{25}{16}\ arc\ sen\frac{2x}{5} - \frac{x\sqrt{25-4x^2}}{8} + c$$

$$\boxed{\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \frac{25}{16}arc\ sen\frac{2x}{5} - \frac{x\sqrt{25-4x^2}}{8} + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2+49}}$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x (en el numerador) y el radical de la forma $\sqrt{a^2x^2+b^2}$ aparece en el denominador, en donde

$$a^2 = 100$$
$$b^2 = 49$$
$$a = 10$$
$$b = 7$$

le corresponde, conforme a la tabla de la página 149, el cambio de variable (1) , es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $$x = \frac{7}{10}\tan t$$

de donde

$$dx = \frac{7}{10}\sec^2 t\, dt$$

y además

$$x^2 = \frac{49}{100}\tan^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \int \frac{\frac{7}{10}\tan t\left(\frac{7}{10}\sec^2 t\, dt\right)}{\sqrt{100\left(\frac{49}{100}\tan^2 t\right) + 49}}$$

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t\, \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\tan^2 t + 49}}$$

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t\, \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\left(\tan^2 t + 1\right)}}$$

y como $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$:

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\sec^2 t}}$$

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t\ \cancel{\sec^2} t\ dt}{7\ \cancel{\sec t}}$$

$$= \frac{7}{100}\int \tan t\ \sec t\ dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso anterior.

PASO 2:

$$\frac{7}{100}\int \tan t\ \sec t\ dt = \frac{7}{100}\sec t + c \qquad \text{(es directa de fórmula)}$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \frac{7}{10}\tan t$. Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$\tan t = \frac{10x}{7}$$

b) Para construir un triángulo rectángulo congruente con esa función trigonométrica debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene la *tangente* de t, implica que t es el ángulo. Además, como la función *tangente* es el cateto opuesto entre el cateto adyacente, se deduce que 7 es el cateto opuesto y que $10x$ es el cateto adyacente. Ver el triángulo rectángulo de la figura 5.

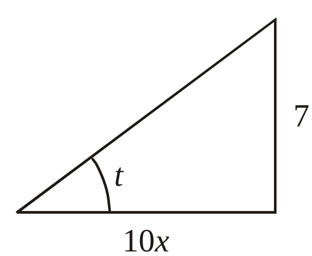


figura 5

El tercer lado, en este caso la hipotenusa, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras (la suma de cuadrados de los catetos), el cual es la raíz cuadrada original $\sqrt{100x^2 + 49}$, como lo muestra la figura 6.

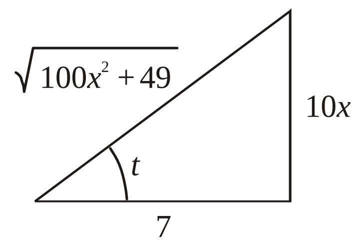


figura 6

Recordando que el resultado de la integración fue

$$\frac{7}{100}\sec t + c$$

del triángulo de la figura 6 debe deducirse el valor de la *secante* de t (hipotenusa entre cateto adyacente), o sea

$$\sec t = \frac{\sqrt{100x^2 + 49}}{7}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$\frac{7}{100}\sec t + c = \frac{7}{100}\left(\frac{\sqrt{100x^2 + 49}}{7}\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \frac{1}{100}\sqrt{100x^2 + 49} + c}$$

OTRA FORMA: Esta integral se puede realizar de manera más directa y simple con un simple de variable:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2+49}} = \int \left(100x^2+49\right)^{-\frac{1}{2}} x\,dx$$

$$u = 100x^2 + 49$$
$$du = 200x\,dx$$

$$= \frac{1}{200}\int \left(100x^2+49\right)^{-\frac{1}{2}} \left(200x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{200}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{200}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{200}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{100x^2+49} + c$$

EJERCICIO 32 (Área 2)

Integrar:

1) $\int x^2 \sqrt{81 - 4x^2}\, dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 121}}{x}\, dx$

3) $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 169}}{x^2}\, dx$

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2 + 121}}\, dx$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 25x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{81x^2 + 1}}$

7) $\int \frac{\sqrt{16 - 49x^2}}{x - 1}\, dx$

8) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{x + 1}\, dx$

9) $\int \frac{\sqrt{1 - 81x^2}}{x^3}\, dx$

10) $\int x^2 \sqrt{400x^2 + 9}\, dx$

XI

LA INTEGRAL DEFINIDA

Áreas 1, 2 y 3

De manera un poco burda, en virtud de que este no es un curso de análisis matemático riguroso, se puede decir que todas las integrales estudiadas y calculadas en los capítulos anteriores son integrales indefinidas, en el sentido de que no queda definida la integral en un valor numérico concreto, sino en otra función. Por ejemplo, de la integral $\int 2x\,dx$ lo más que se puede saber de ella hasta ahora por lo estudiado en los capítulos anteriores es que es igual a la función $x^2 + c$.

Por el contrario, cuando de una integral de obtiene un valor numérico concreto se dice que es una *integral definida*. Eso es lo que se va a estudiar en este capítulo, o sea, cómo convertir en un valor numérico una integral indefinida. Para ello es necesario establecer desde qué valor inicial de x hasta qué valor final se evaluará la integral. Dichos valores se llaman *límites de integración* y se dice que se integra desde $x = a$ hasta $x = b$. Su notación es $\int_a^b f(x)\,dx$

El proceso consta de dos pasos: Primero integrar y después evaluar (darle valores). Si el resultado de la integral es $F(x)$, o sea que $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, para denotar que la función ya se ha integrado, pero no se ha evaluado aún, se emplea la notación

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Luego se evalúa, conforme a la siguiente regla:

$$\boxed{\textbf{\textit{Si}} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c\ , \ \textbf{\textit{entonces}} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

que significa evaluar el resultado de la integración en el límite superior menos el límite inferior.

Ejemplo 1: $\int_1^3 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_1^3 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x \Bigg|_1^3$$

$$= 2x^3 + 2x^2 - x \Big|_1^3$$

y ahora evaluando:

$$= \underbrace{2(3)^3 + 2(3)^2 - 3}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[2(1)^3 + 2(1)^2 - 1\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$= 66$$

Significa que la integral vale en concreto 66, es decir,

$$\boxed{\int_{1}^{3}\left(6x^2+4x-1\right)dx=66}$$

Ejemplo 2: $\int_{3}^{8}\sqrt{x+1}\;dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_{3}^{8}\sqrt{x+1}\;dx=\left.\frac{2\left(x+1\right)^{3/2}}{3}\right|_{3}^{8}$$

Y ahora evaluando:

$$=\underbrace{\frac{2}{3}\left(8+1\right)^{3/2}}_{\text{límite superior}}-\underbrace{\frac{2}{3}\left(3+1\right)^{3/2}}_{\text{límite inferior}}$$

$$=\frac{2}{3}\left(9\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(4\right)^{3/2}$$

Elevar un número a la potencia tres medios ($\frac{3}{2}$) significa elevarlo al cubo y luego sacarle raíz cuadrada, o a la inversa, primero sacarle raíz cuadrada y luego elevarlo al cubo. Entonces sacando primero raíz cuadrada (es el denominador 2 del exponente):

$$=\frac{2}{3}\left(3\right)^{3}-\frac{2}{3}\left(2\right)^{3}$$

$$=\frac{2}{3}\left(27\right)-\frac{2}{3}\left(8\right)$$

$$=18-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{38}{3}$$

Quiere decir que la integral vale en concreto $\frac{38}{3}$, es decir

$$\boxed{\int_3^8 \sqrt{x+1}\; dx = \frac{38}{3}}$$

Ejemplo 3: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\; dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\; dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2} arcsen\frac{x}{2}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\, arc\; sen\frac{x}{2}\Bigg|_0^2$$

y luego evaluando:

$$= \underbrace{\frac{2}{2}\sqrt{4-2^2} + 2\, arcsen\frac{2}{2}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[\frac{0}{2}\sqrt{4-0^2} + 2\, arc\; sen\frac{0}{2}\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$= 0 + 2\; arc\; sen\, 1 - 0 - 0$$

$$= 2\; arc\; sen\, 1$$

Los valores de las funciones trigonométricas inversas son ángulos, los cuales deben siempre expresarse en radianes, no en grados. En este caso, el seno inverso de 1 es 90º , que equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianes, de manera que continuando con la evaluación de la integral, se obtiene

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

o sea que

$$\boxed{\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\; dx = \pi}$$

Ejemplo 4: $\int_0^{\pi/2} (1 + cos\, x)\, dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_0^{\pi/2} (1 + cos\, x)\, dx = x + sen\, x \Big|_0^{\pi/2}$$

y evaluando después:

$$= \underbrace{\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{[0 + sen\, 0]}_{\text{límite inferior}}$$

Cuando π no es parte del argumento de una función trigonométrica debe tomarse su valor como 3.1415926; si, en cambio, es parte del argumento de una función trigonométrica debe tomarse π como un ángulo dado en radianes. En este ejemplo, el primer valor no es parte de un argumento, mientras que el segundo sí, por lo que

$$= \frac{3.1415926}{2} + sen\, 90$$

$$= 2.570796$$

es decir que

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)\; dx = 2.570796}$$

EJERCICIO 33 (Áreas 1, 2 y 3)

Calcular el valor de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^4 \left(x^2 - 9x\right) dx$

2) $\int_2^5 \left(x^3 - x^2 + 8\right) dx$

3) $\int_1^4 \frac{dx}{\left(3-5x\right)^2}$

4= $\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\ dx$

5) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$

6) $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\ dx$

7) $\int_0^2 \frac{dx}{9x^2+36}$

8) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(2x - sen\,2x\right) dx$

9) $\int_0^{\pi/6} \left(1 + cos\,3x\right) dx$

10) $\int_1^3 \frac{dx}{4x}$

XII

APLICACIÓN: CÁLCULO DE ÁREAS

<u>Áreas 1, 2 y 3</u>

El estudiante, hasta este momento de sus estudios, está familiarizado con el cálculo de áreas de figuras geométricas regulares a través del uso de fórmulas, como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, la circunferencia, el rombo, el trapecio, etc., y es muy probable que se haya imaginado que cualquier área se calcula a través de una fórmula. Pero no es así.

Lo que sucede es que no todas las fi guras geométricas son regulares, como las mencionadas en el párrafo anterior, sino que pueden crearse áreas que estén limitadas por las gráficas de algunas funciones, como por ejemplo el área marcada en la figura 7, la cual está acotada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -4x + 12$ y el eje de las x. Para calcular esta área no es posible hacerlo a través de fórmulas, sino con el cálculo integral.

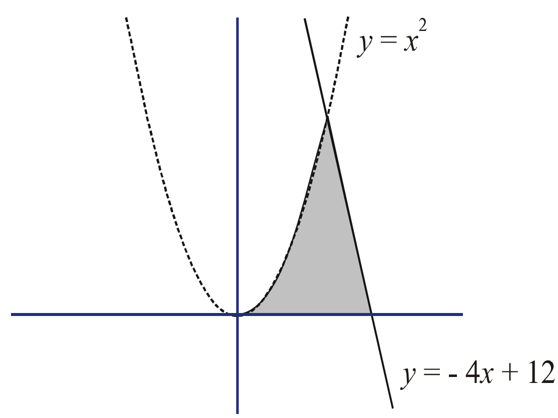


figura 7

Supóngase que se quiere calcular el área bajo la curva de la gráfica de una función cualquiera $y = f(x)$, como lo muestra la figura 8. Se entiende por "área bajo la curva" la proyección que resulta desde la curva hasta el eje de las x, algo así como la sombra que resultaría de la curva hasta el eje de las x si se pusiera una fuente de luz arriba de la curva lo suficientemente alejada para que los extremos izquierdo y derecho de dicha sombra resulten verticales, no oblicuos.

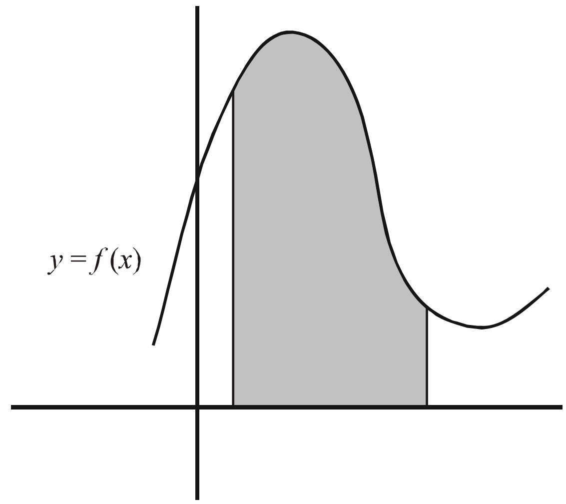


figura 8

Para obtenerla, se divide el área a calcular en rectángulos, todos con la misma base, de manera que la curva $y = f(x)$ pase por el centro de la *contrabase* de cada rectángulo. Entiéndase por *contrabase* el lado opuesto a la base (el de arriba). De esta manera, la altura de cada rectángulo es exactamente la ordenada (la y) en ese punto de la curva correspondiente a $y = f(x)$. Ver la figura 9.

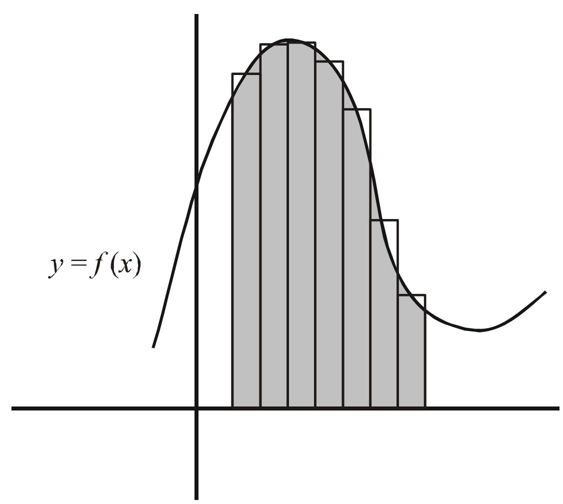


figura 9

La figura 10 (página siguiente) representa uno de estos rectángulos amplificados y aislados de los demás para mostrar con mayor claridad cómo la altura de cualquier rectángulo es la ordenada y de la curva, si el centro de la contrabase de dicho rectángulo pasa por la curva (punto P).

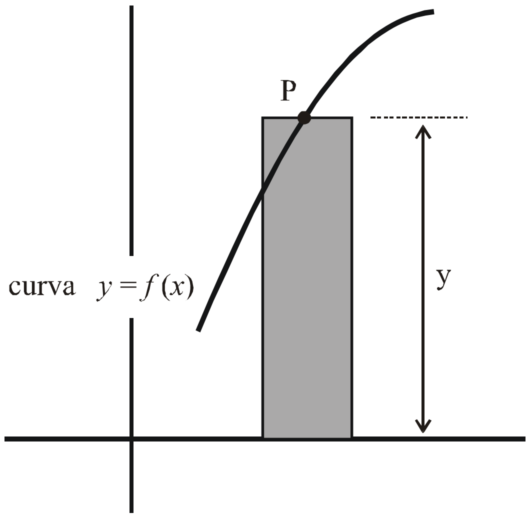


figura 10

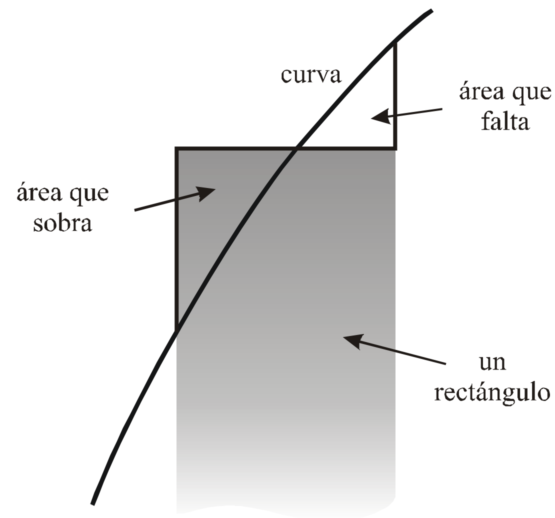


figura 11

Es obvio e intuitivo que la suma de las áreas de los rectángulos no es exactamente igual al área que se desea calcular, ya que de la mitad del rectángulo hacia la izquierda por su parte superior, el rectángulo "se pasa" y hace que haya más área, mientras que de la mitad hacia la derecha el rectángulo "no alcanza" y hace que haya menos área, como lo muestra la figura 11.

Si el área que sobra fuera igual al área que falta no habría ningún problema, pero no son iguales porque no es una linea recta la gráfica de $y = f(x)$. La diferencia entre el área que sobra y el área que falta es lo que se considera "el error". Dicho error aumenta cuando la longitud de la base de los rectángulos aumenta y disminuye cuando la base también se hace más pequeña. Entonces, si la base de los rectángulos se hace cada vez más pequeña de manera que tienda a 0 su longitud, el error a su vez también tiende a cero, lo que significa que la suma de las áreas de los rectángulos tiende a ser exactamente el área bajo la curva de $y = f(x)$. La longitud de dicha base que tiende a cero es dx, y su altura es y, por lo que el área de cada *rectángulo generador* es $A = y\,dx$.

La suma de todas las áreas de los rectángulos así generados está dada por la integral

$$A = \int y\,dx = \int f\left(x\right)dx$$

en donde solamente hace falta especificar desde dónde hasta dónde se extiende esa área. En al figura 12 se muestra en términos generales que esa área se extiende desde que x vale a hasta que x vale b; esto es, desde $x = a$ hasta $x = b$, lo cual se expresa como

$$A = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

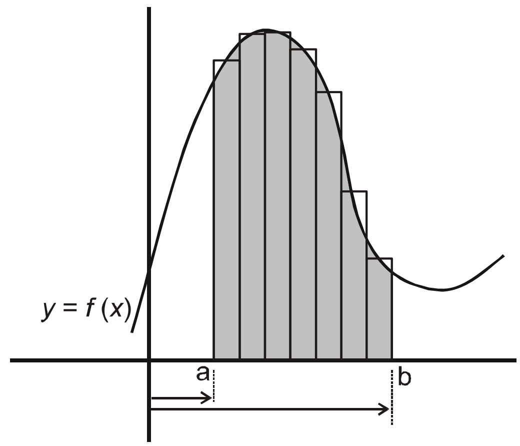


figura 12

Ejemplo 1 Calcular el área bajo la curva $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Solución: La figura 13 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Conforme a lo dicho anteriormente, dicha área se obtiene por medio de la integral

$$A = \int_0^2 x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \underbrace{\frac{2^3}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{superior}}} - \underbrace{\frac{0^3}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{inferior}}}$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

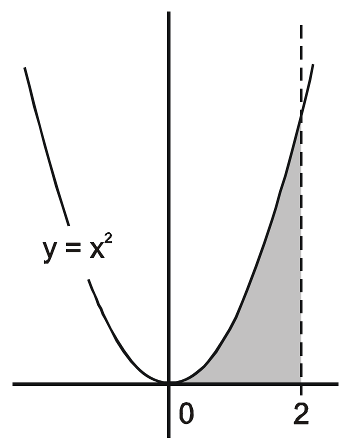


figura 13

Ejemplo 2: Hallar el área bajo la curva $y = x^2 - 2x + 3$, entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución: La figura 14 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Conforme a lo dicho anteriormente, dicha área se obtiene por medio de la integral

$$A = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Bigg|_0^3$$

$$= \underbrace{\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3(3)}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 3(0)\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$\boxed{A = 9}$$

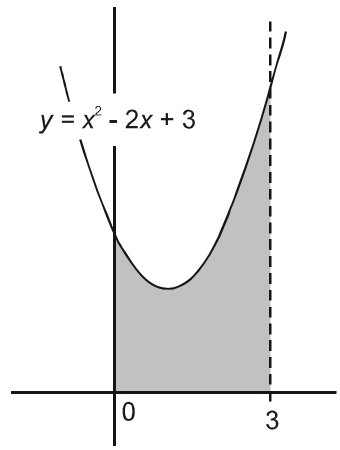


figura 14

Ejemplo 3: Hallar el área limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución: En la figura 15 se muestran las dos parábolas y el área solicitada entre ellas.

Lo primero que deben obtenerse son las coordenadas del punto p, ya que éste define los límites de integración. Dichas coordenadas se obtienen resolviendo por simultáneas las dos ecuaciones que pasan por p:

$$\begin{cases} (1) \quad y = x^2 \\ (2) \quad y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

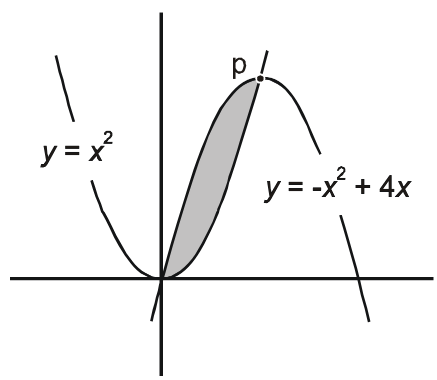


figura 15

sustituyendo (1) en (2):

$$x^2 = -x^2 + 4x$$
$$2x^2 - 4x = 0$$

de donde

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$

Se han obtenido dos valores porque si se observa en la figura 10 realmente hay dos puntos en donde ambas parábolas se cortan, uno en el origen (es la primera solución $x_1 = 0$) y el otro adentro del primer cuadrante (es la segunda solución obtenida $x_2 = 2$). De hecho, éste es el punto buscado.

Además, como se ve en la figura 16, el área pedida es realmente la resta del área bajo la curva $y_1 = -x^2 + 4x$ menos el área bajo la curva $y_2 = x^2$, por lo que dicha área es la resta de las integrales:

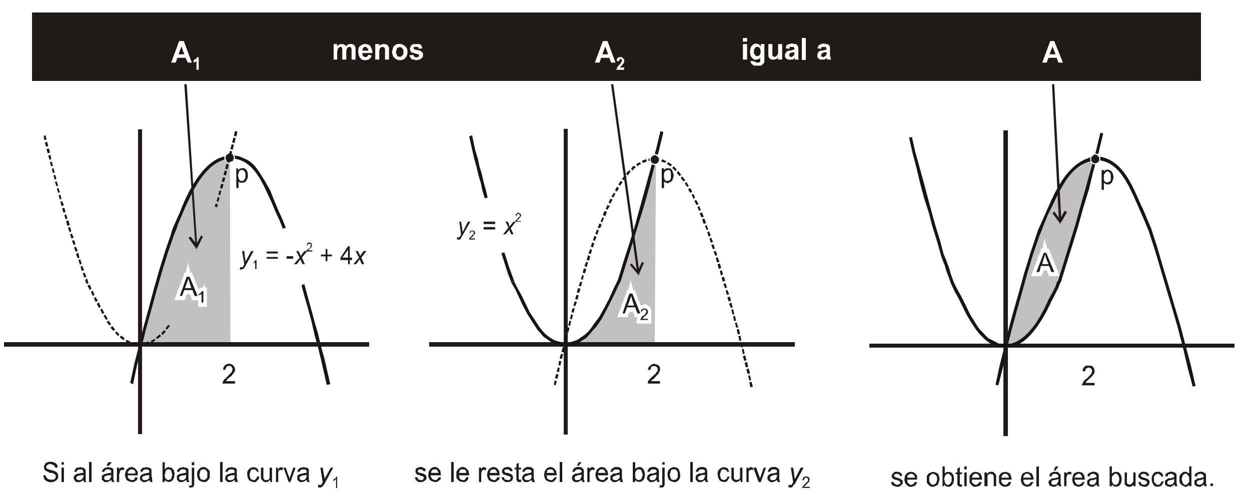


figura 16

$$A = \int_0^2 \left(-x^2 + 4x\right) dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \Bigg|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^2$$

$$= \underbrace{-\frac{2^3}{3} + 2\left(2\right)^2}_{\substack{\text{límite}\\ \text{superior}}} - \underbrace{\left[-\frac{0^3}{3} + 2\left(0\right)^2\right]}_{\substack{\text{límite}\\ \text{inferior}}} - \left[\underbrace{\frac{2^3}{3}}_{\substack{\text{lím}\\ \text{sup.}}} - \underbrace{\frac{0^3}{3}}_{\substack{\text{lím}\\ \text{inf.}}}\right]$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

Ejemplo 4: Hallar el área limitada por las dos ramas de la parábola $x = \left(y - 2\right)^2$ y la recta $x = 4$.

Solución: La figura 17 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Lo primero que debe hacerse es despejar la variable dependiente y de la ecuación $x = \left(y - 2\right)^2$:

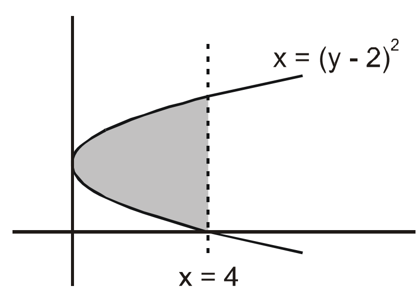


figura 17

Primero se saca raíz cuadrada. Recordar que toda raíz cuadrada es positiva y negativa, por lo que

$$\pm\sqrt{x} = y - 2$$

de donde

$$y = 2 \pm \sqrt{x}$$

La interpretación del signo $\pm$ está detallada en la figura 18. Para cualquier abscisa $x = p$, le corresponden en la gráfica dos ordenadas, una "y" grande y una "y" chica. La "y" grande se obtiene cuando al 2 se le suma una cantidad, en este caso $y = 2 + \sqrt{x}$ y la "y" chica cuando al mismo 2 se le resta una cantidad $y = 2 - \sqrt{x}$.

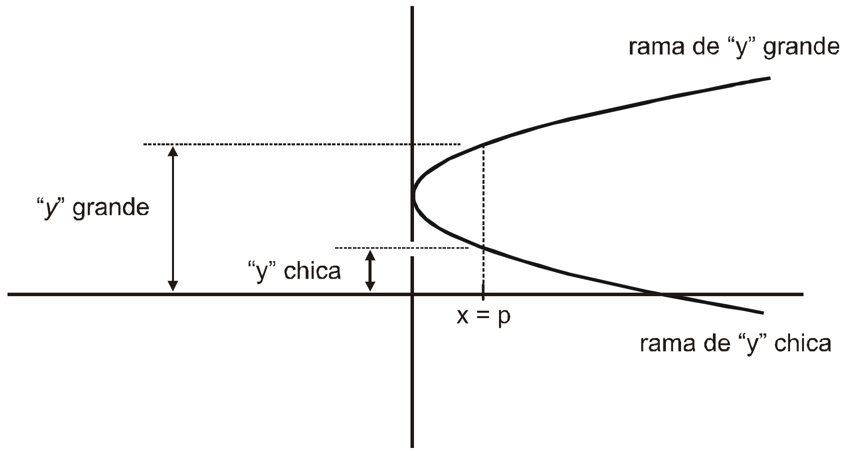


figura 18

El área pedida es la resta del área bajo la curva de la rama grande menos el área bajo la curva de la rama chica, como se ve en la figura 19.

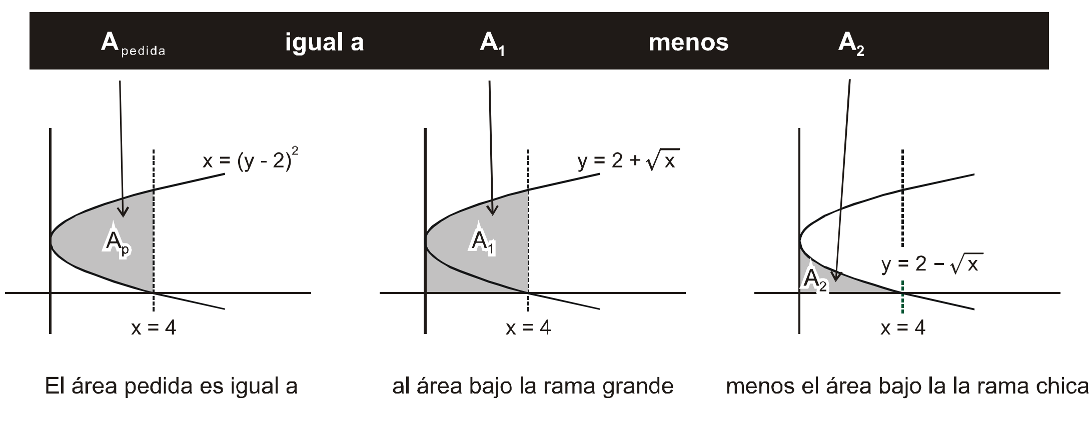


figura 19

$$A = \int_0^4 \left(2 + \sqrt{x}\right) dx \;-\; \int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx$$

Cuando se tiene una suma o resta de integrales con los mismos límites de integración, se puede tomar como una sola integral:

$$A = \int_0^4 \left[2 + \sqrt{x} - \left(2 - \sqrt{x}\right)\right] dx$$

$$A = \int_0^4 2\sqrt{x}\; dx$$

$$A = \left.\frac{4x^{3/2}}{3}\right|_0^4$$

$$A = \underbrace{\frac{4(4)^{3/2}}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{superior}}} - \underbrace{\frac{4(0)^{3/2}}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{inferior}}}$$

$$\boxed{A = \frac{32}{3}}$$

Ejemplo 5 Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la recta $y = -x + 4$ y los dos ejes (figura 20).

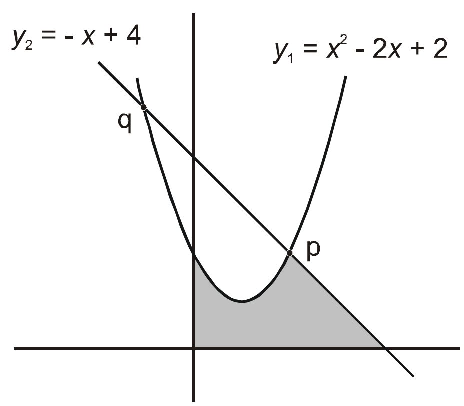


figura 20

Solución: En este caso, el área pedida debe dividirse en dos partes, ya que una parte de ella está bajo la parábola y la otra bajo la recta.

Para eso, primero deben calcularse las coordenadas del punto p de intersección de la recta y la parábola, a partir del cual se deberá dividir el área en dos. Recordar que esto se logra resolviendo por simultáneas las ecuaciones de la recta y la curva que se cortan en un mismo punto.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Como ambas son iguales a y, se pueden igualar entre sí:

$$x^2 - 2x + 2 = -x + 4$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

de donde

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$

Por simple inspección con la figura 20, se puede deducir que el valor de $x_1 = 2$ corresponde al punto p y el de $x_2 = -1$ al punto q.

Por otra parte, también se requiere conocer las coordenadas del punto en donde la recta corta al eje de las x, lo cual se logra cuando $y = 0$ en la ecuación de la recta, o sea

$$y = -x + 4$$
$$0 = -x + 4$$
$$x = 4$$

Entonces el área debe dividirse en dos partes como se ve en la figura 21. La suma de ambas es el área pedida, esto es

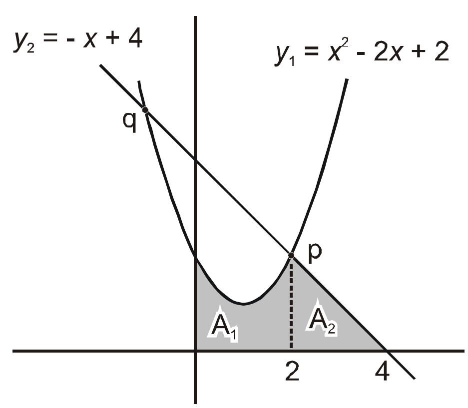


figura 21

$$A = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx + \int_2^4 \left(-x + 4\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{-x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2(2) - \frac{4^2}{2} + 4(4) + \frac{2^2}{2} - 4(2)$$

$$\boxed{A = \frac{14}{3}}$$

EJERCICIO 34

Obtener las áreas que se piden:

1) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$, el eje *x*, el eje *y*, y la recta $x = 3$.

2) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 3$, el eje *x*, el eje *y*, y la recta $x = 2$.

3) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$ y las rectas $x = -1$, $x = 2$ y $y = 0$.

4) El área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y los dos ejes.

5) El área limitada por la parábola $y = x^2 - 6x + 11$, los dos ejes y la recta $x = 3$.

6) El área limitada por la parábola $y = -9x^2 + 6x$ y el eje *x*.

7) El área limitada por la parábola $y = -4x^2 + 12x$ y el eje *x*.

8) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, y las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$.

9) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $\left(x-5\right)^2+\left(y-6\right)^2=25$, y las rectas $y=0$, $x=2$ y . $x=9$.

10) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $\left(x-5\right)^2+\left(y-6\right)^2=25$, y las rectas $y=0$, $x=0$ y . $x=8$.

11) El área más pequeña limitada por la circunferencia $\left(x-6\right)^2+\left(y-7\right)^2=25$ y la recta $y=-2x+9$.

12) El área más pequeña limitada por la circunferencia $\left(x-6\right)^2+\left(y-7\right)^2=25$ y la recta $x-2y+3=0$.

13) El área limitada por la circunferencia $\left(x-6\right)^2+\left(y-7\right)^2=25$, los dos ejes y las rectas $x+2y-10=0$ y $x=6$.

14) El área más pequeña del primer cuadrante limitada el eje de las *x*, por la circunferencia $\left(x-15\right)^2+\left(y-10\right)^2=169$ y la recta $3x+2y-39=0$.

15) El área limitada por la parábola $x^2+10y-30=0$, el eje x y las rectas $y=x-2$ y $x=9$.

16) El área limitada por la rama superior de la parábola $x^2+10y-30=0$ con las rectas $x=5$, $x=9$ y $3x-4y+17=0$.

17) El área limitada por las parábolas $y^2-x-10y+30=0$ y $y^2+x-14y+40=0$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 19, página 5

1) $dy = \left(5x^4 - 7 \right) dx$

2) $dy = \left(15x^2 + 10x - 1 \right) dx$

3) $dy = \dfrac{-48x\, dx}{\left(4x^2 - 63 \right)^2}$

4) $dy = \dfrac{-35x^6\, dx}{2\sqrt{9 - 5x^7}}$

5) $dy = \dfrac{\left(8x^3 - 24x^2 + 1\right) dx}{7\left(2x^4 - 8x^3 + x\right)^{6/7}}$

6) $dy = \dfrac{7dx}{\sqrt{\left(9 - 2x\right)^3}}$

7) $dy = \dfrac{-20\left(3x^2 - 6x + 9 \right) dx}{\left(x^3 - 3x^2 + 9x \right)^5}$

8) $dy = \dfrac{2772x^3\, dx}{\left(6 - 7x^4 \right)^{10}}$

9) $dy = -\dfrac{27\left(1 - 36x^5\right) dx}{5\left(x - 6x^6\right)^{14/5}}$

10) $dy = 5\, cos\, (5x - 7)\, dx$

11) $dy = -\left(3 - 28x^6 \right) sen\left(3x - 4x^7 \right) dx$

12) $dy = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 9}}\, sec^2 \sqrt{2x - 9}\; dx$

13) $dy = -\dfrac{3}{x^4}\, tan\left(\dfrac{1}{x^3} \right) sec\left(\dfrac{1}{x^3} \right) dx$

14) $dy = \dfrac{7\, dx}{2x}$

15) $dy = 4e^{4x} dx$

16) $dy = \dfrac{3e^{\sqrt{3x}}\, dx}{2\sqrt{3x}}$

EJERCICIO 20, página 14

1) $\frac{x^{12}}{12}+c$

2) $\frac{x^{11}}{11}+c$

3) $3x^2+c$

4) $\frac{9x^7}{7}+c$

5) $3x^2-5x+c$

6) $\frac{11x^4}{4}-3x^3+\frac{x^2}{2}-5x+c$

7) $\frac{7x^3}{3}+4x^2-2x+c$

8) $x^3+5x^2-11x+c$

9) $-\frac{1}{3x^3}+c$

10) $\frac{1}{2}ln\,x+c$

11) $2x^4+\frac{4}{3x}+\frac{2}{5}ln\,x+c$

12) $-\frac{6}{35x^{7/2}}+\frac{10x^{11/2}}{33}+c$

13) $\frac{6}{11}ln\,x-\frac{11x^2}{12}+c$

14) $-\frac{9}{8x^4}+\frac{x^6}{27}+c$

15) $-\frac{11}{6x^{3/5}}+\frac{50x^{13/5}}{143}+c$

16) $\frac{169x^{9/13}}{99}-\frac{11x^{17/13}}{17}+c$

EJERCICIO 21, página 28

1) $\frac{\left(13x-12\right)^8}{104}+C$

2) $-\frac{\left(2-19x\right)^{12}}{228}+c$

3) $\frac{2\left(7x-15\right)^{3/2}}{21}+c$

4) $\frac{1}{8}ln\left(8x-13\right)+c$

5) $-\dfrac{1}{20\left(15x+11\right)^{8}}+c$

6) $-\sqrt{9-4x}+c$

7) $\dfrac{\left(3x^{2}-11\right)^{9}}{54}+c$

8) $-\dfrac{1}{6\left(3x^{2}-1\right)^{3}}+c$

9) $\dfrac{\left(5x^{2}+80x+22\right)^{4}}{40}+c$

10) $-\dfrac{1}{40\left(4x^{2}-8x\right)^{5}}+c$

11) $\dfrac{2\left(6x^{2}+3x+11\right)^{3/2}}{9}+c$

12) $\dfrac{10\sqrt{7x^{2}+21x-9}}{7}+c$

13) $-\dfrac{4}{3\left(x^{3}+9x\right)}+c$

14) $\dfrac{\left(e^{3x}-8\right)^{6}}{18}+c$

15) $\dfrac{3\left(5x^{2}-10x+9\right)^{7/5}}{14}+c$

16) $\dfrac{2\left(8x^{3}+12x-1\right)^{1/4}}{3}+c$

17) $2\,ln\left(x^{4}+2x^{2}-9\right)+c$

18) $-\dfrac{1}{6\left(2x^{3}+3x^{2}-9\right)^{7}}+c$

EJERCICIO 22, página 35

1) $\dfrac{x}{2}\sqrt{64x^{2}+121}+\dfrac{121}{16}ln\left(8x+\sqrt{64x^{2}+121}\right)+c$

2) $\dfrac{x}{2}\sqrt{81-144x^{2}}+\dfrac{81}{24}arc\ sen\dfrac{12x}{9}+c$

3) $\dfrac{7}{4} ln \dfrac{1+2x}{1-2x} + c$

4) $\dfrac{2}{13} arcsen \dfrac{13x}{5} + c$

5) $\dfrac{x}{2}\sqrt{100-9x^2} + \dfrac{50}{3} arc\ sen \dfrac{3x}{10} + c$

6) $\dfrac{x}{2}\sqrt{9x^2-1} - \dfrac{1}{6} ln\left(3x + \sqrt{9x^2-1}\right) + c$

7) $\dfrac{1}{10} arc\ tan \dfrac{10x}{9} + c$

8) $\dfrac{3}{28} ln \dfrac{4x-7}{4x+7} + c$

9) $ln\left(x + \sqrt{x^2-25}\right) + c$

10) $\dfrac{10}{3} ln\left(3x + \sqrt{9x^2+100}\right) + c$

11) $\dfrac{3}{5} ln\left(20x + \sqrt{400x^2-121}\right) + c$

12) $\dfrac{x}{2}\sqrt{81-121x^2} + \dfrac{81}{22} arc\ sen \dfrac{11x}{9} + c$

13) $4\ ln \dfrac{1+x}{1-x} + c$

14) $11\ ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$

EJERCICIO 23, página 56

1) $\dfrac{1}{15} arctan \dfrac{5x+1}{3} + c$

2) $\dfrac{1}{32} ln\left(\dfrac{4x-7}{4x+1}\right) + c$

3) $\dfrac{1}{3} ln\left(3x - 7 + \sqrt{9x^2-42x+50}\right) + c$

4) $\dfrac{1}{2} ln\left(2x - 5 + \sqrt{4x^2-20x+50}\right) + c$

5) $$\frac{2x-7}{4}\sqrt{4x^2-28x-32}-\frac{81}{4}ln\left(2x-7+\sqrt{4x^2-28x-32}\right)+c$$

6) $$\frac{6x+1}{12}\sqrt{36x^2+12x+10}+\frac{3}{4}ln\left(6x+1+\sqrt{36x^2+12x+10}\right)+c$$

7) $$\frac{1}{72}ln\frac{6x-1}{6x+11}+c$$

8) $$\frac{1}{72}arc\ tan\frac{8x+9}{9}+c$$

9) $$arc\ sen\frac{x+3}{9}+c$$

10) $$\frac{2x-5}{4}\sqrt{20x-4x^2-24}+\frac{1}{4}arc\ sen\left(2x-5\right)+c$$

11) $$\frac{1}{66}ln\left(\frac{3x+9}{13-3x}\right)+c$$

12) $$\frac{1}{10}arc\ sen\frac{10x+1}{13}+c$$

ÁREA 2

13) $$\frac{25x+9}{50}\sqrt{25x^2+18x-8}-\frac{281}{250}ln\left(5x+\frac{9}{5}+\sqrt{25x^2+18x-8}\right)+c$$

14) $$\frac{1}{2\sqrt{53}}ln\frac{4x-7-\sqrt{53}}{4x-7+\sqrt{53}}+c$$

15) $$\frac{1}{4}ln\left(4x-\frac{7}{8}+\sqrt{16x^2-7x-2}\right)+c$$

16) $$\frac{1}{\sqrt{1257}}ln\frac{98x+9-\sqrt{1257}}{98x+9+\sqrt{1257}}+c$$

17) $$\frac{6x+1}{12}\sqrt{3x^2+x+9}+\frac{107}{24\sqrt{3}}ln\left(\sqrt{3}\,x+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3x^2+x+9}\right)+c$$

18) $\dfrac{1}{\sqrt{381}}\, ln\dfrac{10x+11-\sqrt{381}}{10x+11+\sqrt{381}}+c$

19) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\, ln\left(\sqrt{7}\; x+\dfrac{11}{2\sqrt{7}}+\sqrt{7x^2\; +11x+22}\right)+c$

20) $\dfrac{1}{19}\, ln\dfrac{16x-38}{16x}+c$

21) $\dfrac{2x-17}{4}\sqrt{x^2\; -17x}\; -\dfrac{289}{4}\, ln\left(x-\dfrac{17}{2}+\sqrt{x^2\; -17x}\right)+c$

22) $\dfrac{1}{\sqrt{385}}\, ln\dfrac{24x+1-\sqrt{385}}{24x+1+\sqrt{385}}+c$

23) $\dfrac{1}{11}\, ln\dfrac{30x}{30x+22}+c$

24) $\dfrac{\sqrt{7}\; x}{2}\sqrt{x^2\; +1}\; +\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, ln\left(x+\sqrt{x^2\; +1}\right)+c$

EJERCICIO 24 página 71 (Área 2)

1) $\dfrac{1}{81}\, ln\left(81x^2\; +36x+5\right)-\dfrac{67}{81}\, arc\, tan\left(9x+2\right)+c$

2) $-\dfrac{35}{48}\, ln\left[11\left(2x-23\right)\right]-\dfrac{13}{48}\, ln\left[-11\left(2x+1\right)\right]+c$

3) $\dfrac{7}{4}\, ln\left[-6\left(2x-11\right)\right]-\dfrac{5}{4}\, ln\left[6\left(2x-3\right)\right]+c$

4) $\dfrac{7}{18}\; ln\left(9x^2\; +60x+125\right)\; -\; \dfrac{76}{45}\, arc\, tan\left[\dfrac{1}{5}\left(3x+10\right)\right]+c$

5) $\dfrac{131}{256}\, ln\left[-59\left(4x-15\right)\right]+\dfrac{13}{256}\, ln\left[59\left(4x+1\right)\right]+c$

6) $-\dfrac{25}{9}\, ln\left[-67\left(x-3\right)\right]-\dfrac{92}{9}\, ln\left[67\left(x+15\right)\right]+c$

7) $\frac{17}{25}\sqrt{25x^2-10x+2}-\frac{82}{25}ln\left(5x-1+\sqrt{25x^2-10x+2}\right)+c$

8) $\frac{1}{6}\sqrt{36x^2+60x-75}+\frac{4}{3}ln\left[2\left(6x+5+\sqrt{36x^2+60x-75}\right)\right]+c$

9) $-\frac{1}{4}\sqrt{-36x^2+12x+35}+\frac{11}{12}arc\ sen\left[\frac{1}{6}(1-6x)\right]+c$

10) $\frac{\left(9x^2-7x\right)^{3/2}}{27}-\frac{155}{54}\left[\frac{18x-7}{12}\sqrt{9x^2-7x}-\frac{49}{72}ln\left(3x-\frac{7}{6}+\sqrt{9x^2-7x}\right)\right]+c$

11) $\frac{\sqrt{25x^2-11x+5}}{25}+\frac{311}{250}ln\left[\left(5x-\frac{11}{10}+\sqrt{25x^2-11x+5}\right)\right]+c$

12) $\frac{1}{4}ln\left(6x^2-24x-5\right)+\frac{3}{\sqrt{174}}ln\left(\frac{6x-12-\sqrt{174}}{6x-12+\sqrt{174}}\right)+c$

EJERCICIO 25 página 76

1) $-\frac{1}{13}cos13x+c$

2) $\frac{1}{4}sen\ 4x+c$

3) $-\frac{1}{9}ln\ sec(4-9x)+c$

4) $\frac{1}{17}ln\,sen(17x+6)+c$

5) $\frac{1}{11}ln\left[sec(11x+12)+tan(11x+12)\right]+c$

6) $-\frac{1}{5}ln\left[csc(1-5x)+cot(1-5x)\right]+c$

6) $-\frac{1}{2}cos\left(x^2-10x+1\right)+c$

7) $\frac{10}{3}sen\left(5x^2+10x+10\right)+c$

8) $7\,ln\,sec\left(7x^2-21x+9\right)+c$

9) $3\,ln\,sen\left(x^3+9x^2-15\right)+c$

10) $4\,ln\left[tan\left(8x^3-12x^2+12x-13\right)+sec\left(8x^3-12x^2+12x-13\right)\right]+c$

11) $-5\,cos\sqrt{2x}+c$

12) $-\dfrac{7}{3}sen\left(\dfrac{3}{x}\right)+c$

13) $-\dfrac{11}{18}ln\,sec\left(\dfrac{9}{x^2}\right)+c$

14) $-\dfrac{2}{15}ln\left[csc\left(\dfrac{5}{x^3}\right)-cot\left(\dfrac{5}{x^3}\right)\right]+c$

EJERCICIO 26, página 97

1) $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{1}{28}sen\left(14x-4\right)+\dfrac{1}{224}sen\left(28x-8\right)+c$

2) $\dfrac{1}{12}sen\,9x+\dfrac{1}{108}sen\,27x+c$

3) $-\dfrac{5}{88}sen\left(9-11x\right)-\dfrac{5}{528}sen\left(27-33x\right)-\dfrac{1}{880}sen\left(45-55x\right)+c$

4) $\dfrac{1}{7}ln\,cos\left(7x+8\right)+\dfrac{1}{14}sec^2\left(7x+8\right)+c$

5) $\dfrac{1}{12}csc^2\,12x-\dfrac{1}{48}csc^4\,12x+\dfrac{1}{12}ln\;sen\,12x+c$

6) $\dfrac{2}{39}tan\,13x+\dfrac{1}{39}sec^2\,13x\;tan\,13x+c$

7) $\dfrac{1}{6}tan\left(6x+17\right)+c$

8) $-\dfrac{2}{27}cot\,9x-\dfrac{1}{27}cot\,9x\;csc^2\,9x+c$

9) $\frac{1}{15} sen^3 5x + c$

10) $\frac{1}{18} sec^2 9x + c$

11) $-\frac{1}{8} cos\, 8x + c$

12) $-\frac{1}{3} ln\left(csc\, 6x - cot\, 6x\right) + c$

13) $\frac{1}{5} tan\, 5x + \frac{1}{5} sec\, 5x + c$

14) $x - \frac{1}{9} cos\, 9x + c$

15) $-x + \frac{1}{4} ln\left(tan\, 4x + sec\, 4x\right) + c$

16) $x + \frac{1}{5} cos^2 5x + c$

17) $-x - \frac{1}{8} cot\, 4x + c$

18) $-x + \frac{1}{6} cos\, 6x + \frac{sen\, 3x}{3\left(cos\, 3x - sen\, 3x\right)} + c$

EJERCICIO 27, página 112

1) $\sqrt{1-x^2} + x\, arc\ sen\, x + c$

2) $-x + x\, ln\left(1-x\right) - ln\left(1-x\right) + c$

3) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} arc\, tan\, x + \frac{x^2}{2} arc\, tan\, x + c$

4) $\frac{x + \left(x^2 - 1\right) arc\, tan\, x}{4\left(x^2 + 1\right)} + c$

5) $2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x}\ \ arc\, sen\sqrt{x} + c$

6) $\frac{1}{3} arc\, tan\left(x^2 - 1\right)^{3/2} + c$

7) $ln\, x - \frac{1}{x} arc\, sen\, x - ln\left(2 + 2\sqrt{1-x^2}\right) + c$

8) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} ln\, x + c$

9) $-\frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3} ln\, x + c$

10) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} cos\, 2x + \frac{x}{4} sen\, 2x + c$

11) $\frac{x}{2}\, sen\, ln\, x - \frac{x}{2}\, cos\, ln\, x + c$

12) $\frac{2\sqrt{x^3}\left(-2 + ln\, x\right)}{9} + c$

EJERCICIO 28, página 125

1) $\frac{6}{x-1} + \frac{2}{5x-3}$

2) $\frac{10}{x-3} + \frac{11}{2x}$

3) $\frac{8}{5x} - \frac{1}{2x+1}$

4) $-\frac{9}{\left(x+1\right)} + \frac{9}{\left(4x-1\right)}$

5) $\frac{13}{7x-2} - \frac{1}{x}$

6) $\frac{1}{x} + \frac{10}{x+1} - \frac{3}{x-1}$

7) $\frac{3}{x-3} - \frac{9}{x-2} + \frac{2}{x+1}$

8) $\frac{1}{3x+1} - \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x-3}$

9) $\frac{9}{x+1} + \frac{4}{2x-5} - \frac{1}{x-1}$

10) $\frac{4}{4x+1} - \frac{5}{5x-1} - \frac{2}{x-10}$

EJERCICIO 29, página 130

1) $\frac{7}{2x+1} + \frac{2}{\left(2x+1\right)^2}$

2) $\frac{5}{\left(3x-2\right)^2}$

3) $\frac{1}{5\left(5x-4\right)} + \frac{4}{5\left(5x-4\right)^2}$

4) $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\left(x-1\right)^2}$

5) $\frac{1}{5x+3} - \frac{8}{\left(5x+3\right)^2}$

6) $\dfrac{21}{361(2x-3)}+\dfrac{170}{361(x+8)}-\dfrac{67}{19(x+8)^2}$

7) $\dfrac{1}{25(5x+7)}-\dfrac{14}{25(5x+7)^2}+\dfrac{49}{25(5x+7)^3}$

8) $\dfrac{1}{x+9}-\dfrac{11}{(x+9)^2}+\dfrac{18}{(x+9)^3}$

9) $-\dfrac{59}{169(3x-2)}+\dfrac{152}{169(2x+3)}+\dfrac{3}{13(2x+3)^2}$

10) $\dfrac{210}{961(2x-9)}-\dfrac{1664}{4805(5x-7)}-\dfrac{243}{155(5x-7)^2}$

EJERCICIO 30, página 139

1) $\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}$

2) $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{7}{(x-1)^2}$

3) $\dfrac{16}{17(x-3)}+\dfrac{x-13}{17(x^2+x+5)}$

4) $\dfrac{257}{338(2x-1)}+\dfrac{21}{26(2x-1)^2}-\dfrac{2(11x+12)}{169(x^2+3)}$

5) $\dfrac{27}{4x}+\dfrac{9}{2x^2}-\dfrac{61}{4(3x-2)}$

6) $\dfrac{1}{x^2+4}+\dfrac{x-8}{(x^2+4)^2}+\dfrac{17-4x}{(x^2+4)^3}$

7) $\dfrac{5(x+1)}{x^2-x+7}-\dfrac{5(5x+7)}{(x^2-x+7)^2}$

8) $\dfrac{13}{64x}+\dfrac{1}{8x^2}+\dfrac{145-13x}{64(x^2+3x+8)}$

EJERCICIO 31, página 148

1) $2\,ln\left(2x+1\right)-ln\left(x+2\right)-ln\left(x-3\right)+c$

2) $ln\left(3x-2\right)+ln\left(2x+1\right)-2\,ln\left(x+5\right)+c$

3) $ln\left(x+4\right)+ln\left(2x-3\right)-ln\left(3x-1\right)+c$

4) $\frac{1}{3}ln\left(3x-1\right)-\frac{2}{3\left(3x-1\right)}+c$

5) $-2\,ln\left(2x-3\right)-\frac{3}{2\left(2x-3\right)}-\frac{5}{4\left(2x-3\right)^2}+c$

6) $ln\left(2x-1\right)-5\,ln\left(x-4\right)-\frac{3}{x-4}+c$

7) $2x+\frac{2}{x+1}+ln\left(x+1\right)+c$

8) $3x+\frac{1}{x-3}+2\,ln\left(x-3\right)+c$

9) $-\frac{3\,arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+ln\left(x-1\right)-\frac{1}{2}ln\left(x^2+2\right)+c$

10) $-\,arc\;tan\,x+3\,ln\left(x+1\right)+ln\left(x^2+1\right)+c$

11) $-4\sqrt{3}\;arc\,tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+ln\left(x-3\right)+ln\left(x^2+x+1\right)+c$

EJERCICIO 32, página 164

1) $-\frac{81x}{32}\sqrt{81-4x^2}+\frac{x^3}{4}\sqrt{81-4x^2}+\frac{6561}{64}ArcSen\left(\frac{2x}{9}\right)+c$

2) $\sqrt{x^2+121}+11ln\left(\frac{\sqrt{x^2+121}-11}{x}\right)+c$

3) $-\frac{\sqrt{4x^2-169}}{x}+2\,ln\left(4x+2\sqrt{4x^2-169}\right)+c$

4)

EJERCICIO 33, página 170

1)	- 46.5	2)	137.25	3)	0.0882353
4)	32.6666	5)	1	6)	7.06858
7)	0.0436332	8)	1.35055	9)	0.856932
10)	0.274653				

EJERCICIO 34, página 181

1)	15	2)	8.666	3)	9
4)	2.666	5)	15	6)	0.4444
7)	18	8)	3.956	9)	10.365
10)	14.3213	11)	1.5911	12)	17.6787
13)	19.4088	14)	88.0921	15)	21.5135
16)	5.8666	17)	2.6666		

FORMULARIO GENERAL DE CÁLCULO

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u + v + ...) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + ...$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \, lna\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}senu = cosu\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cosu = -senu\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}tanu = sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cotu = -csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}secu = tanusecu\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cscu = -cotucscu\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}lnu = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} arc\,sen u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx} arccos u = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx} arctan u = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx} arccot u = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx} arc\,sec u = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} arccsc u = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Integrales:

$$\int dx = x + c$$

$$\int cudx = c\int udx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{para } n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln\, x + c$$

$$\int (u + v + \ldots)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx + \ldots$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{para } u \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = ln u + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2}\; dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ sen \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{u - a}{u + a} + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{a + u}{a - u} + c$$

$$\int sen\, u\, du = -cos u + c \qquad \int cos u du = sen\, u + c$$

$$\int tan u du = ln\, sec u + c \qquad \int cot u du = ln\, sen u + c$$

$$\int sec u\, du = ln\left(tan u + sec u\right) + c \qquad \int csc u du = ln\left(csc u - cot u\right) + c$$

$$\int sec^2 u\, du = tan u + c \qquad \int csc^2 u\ du = -cot u + c$$

$$\int tan u\, sec u\, du = tan u + c \qquad \int cot u\, csc u\, du = -csc u + c$$

principales identidades utilizadas en las integrales trigonométricas:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad tan^2 x + 1 = sec^2 x$$

$$cot^2 x + 1 = csc^2 x \qquad sen^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - cos\, 2x\right)$$

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + cos\,2x\right) \qquad sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos x$$

$$tan x = \frac{sen\,x}{cos x} \qquad cot\,x = \frac{cos x}{sen\,x}$$

$$sec x = \frac{1}{cos\,x} \qquad csc x = \frac{1}{sen\,x}$$

integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

cambios de variable trigonométricos:

para el radical	hacer el cambio
$\sqrt{a^2x^2 + b^2}$	$x = \frac{b}{a} tan\,t$
$\sqrt{a^2x^2 - b^2}$	$x = \frac{b}{a} sec t$
$\sqrt{b^2 - a^2x^2}$	$x = \frac{b}{a} sen t$